



Universidad de Baja California

TESIS DOCTORAL

Propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, a partir de la aplicación del modelo de van hiele, en estudiantes de fotogrametría digital avanzada

QUE PRESENTA

Willian Benigno Barragán Zaque

PARA OBTENER EL GRADO DE

Doctor en Educación

DIRECTOR DE TESIS DOCTORAL

Doctor Nelson Enrique Barrios Jara

Tepic, Nayarit; Diciembre de 2022.



VOTO APROBATORIO PARA LA DEFENSA DE TESIS DOCTORAL

Tepic, Nayarit; 11 de diciembre de 2022.

Dr. Antonio Ayón Bañuelos.
Rector de la Universidad de Baja California

El suscrito **Dr. Nelson Enrique Barrios Jara**, asignado por la institución como director de Tesis Doctoral y responsable de dirigir el trabajo de investigación del Candidato al Grado de **Doctor en Educación** hago constar que:

Willian Benigno Barragán Zaque

Ha culminado la Tesis Doctoral satisfactoriamente bajo las normas establecidas por la Universidad de Baja California para la presentación y defensa, con el tema denominado:
“Propuesta Didáctica para la Enseñanza de la Estereofotogrametría, a partir de la Aplicación del Modelo de Van Hiele, en Estudiantes de Fotogrametría Digital Avanzada”

Por tanto, habiendo sido designado por la institución como su **DIRECTOR DE TESIS DOCTORAL** le doy el **VOTO APROBATORIO** para la defensa, evaluación y obtención del Grado Académico de **DOCTOR**, reconociendo que este trabajo es resultado de un largo proceso de investigación científica, realizada con alto profesionalismo y constituye un tema relevante y de actualidad científica que aportará a la Ciencia, al Estado del Arte y a las diferentes disciplinas científicas que la integran.

Por lo que considero que el trabajo reúne los requisitos reglamentarios y exigidos por la institución para ser defendida ante el tribunal de tesis que la Universidad de Baja California designe para ser evaluado.

DIRECTOR DE TESIS DOCTORAL

Dr. Nelson Enrique Barrios Jara.

DEDICATORIA:

A Berlín, mi hijo, por su apoyo y colaboración
en el desarrollo de la presente investigación y por el
tiempo que no le dediqué.

AGRADECIMIENTOS:

“A la Universidad, a mi director por su cooperación, a mis docentes, a toda mi familia por su apoyo en este proceso.

A mis amigos, a los participantes del grupo muestral que con sus resultados posibilitaron este trabajo de investigación,
a los investigadores internacionales por su validación y evaluación como expertos”.

RESUMEN

La enseñanza de la estereofotogrametría generalmente se ha reducido al levantamiento planimétrico, a la concreción de proyecciones y a la realización de un conjunto de operaciones necesarias para obtener puntos de una situación topográfica, asignado de manera convencional operaciones con respecto a planos y manejos básicos de elementos geométricos, esto ha generado múltiples problemáticas ya que se encuentran en la realidad mapas de curvas de nivel, establecimiento de puntos acotados, multi proyección de planos que exigen que el proceso de enseñanza sea menos instrumental y más comprensivo.

En este orden la presente investigación formula una propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, a partir de la aplicación del modelo de Van Hiele, lo anterior para estudiantes de fotogrametría digital avanzada, buscando en primer lugar mejorar los procesos laboriosos y tediosos en la captura de mediciones que se realizan con el objetivo de mapear - cartografiar terrenos, en coordenadas "X", "Y" y "Z". en segundo lugar y haciendo uso del modelo de Van Hiele se establecen cinco niveles jerarquizados de razonamiento geométrico, que permiten concretar un modelo didáctico que lleva a mejores dominios y comprensiones de las nociones y capacidades necesarias para la concreción de modelos o estructuras numéricas de datos que representa la distribución espacial de la altitud de la superficie terrestre.

De esta forma la presente investigación se convierte en un modelo para la realización de levantamientos en ingeniería, aplicable en proyectos de rutas, autopistas, presas, canales, acueductos, oleoductos, gasoductos, obras de arquitectura, relajamientos catastrales, estudios geológicos, predios agrícolas, caracterización de uso de suelo, y todas las posibles actividades de medición a las afectaciones que el ser humano hace en la superficie terrestre.

La investigación se desarrolló a través de un enfoque mixto, bajo el paradigma de la complejidad, con diseño no experimental, alcance descriptivo y con técnica documental y encuesta, esto permitió determinar las comprensiones teóricas

estableciendo un mapa categorial que luego sirve de insumo para la recolección de información en 19 universidades a nivel mundial donde se estableció esta materia en carreras de ingeniería y ciencias de la tierra.

Los datos recogidos mediante encuesta alcanzaron un 3% de margen de error y 97% de confianza, lo que permite analizar las interpretaciones que hacen los docentes e investigadores, que sirvieron de insumo y constratación para la formulación de una propuesta basada en el modelo de Van Hiele, donde se establecen niveles jerarquizados de razonamiento geométrico, que llevan concretar un mejor aprendizaje de la estereofotogrametría digital avanzada.

Como proyección se establecen elementos base para próximos estudios en distintos sectores relacionados no solamente con el área técnica de la fotogrametría y cartografía, sino también con la pedagogía. Siendo un elemento importante para poder realizar una verdadera transmisión de conocimiento y aplicar técnicas que impulsen el elemento básico de planeación generando desarrollo en la comunidad y la población menos favorecida.

PALABRAS CLAVE: Fotogrametría, Estereofotogrametría, Señales, Geometría, Van Hiele, Enseñanza, Didáctica.

ABSTRACT

The teaching of stereophotogrammetry has generally been reduced to the planimetric survey, the realization of projections and the realization of a set of operations necessary to obtain points from a topographic situation, conventionally assigned operations with respect to planes and basic handling of geometric elements. , this has generated multiple problems since there are in reality maps of level curves, establishment of delimited points, multi-projection of planes that require the teaching process to be less instrumental and more comprehensive.

In this order, the present investigation formulates a didactic proposal for the teaching of stereophotogrammetry, based on the application of the Van Hiele model, the above for students of advanced digital photogrammetry, seeking first of all to improve the laborious and tedious processes in the capture. of measurements that are carried out with the objective of mapping - mapping terrain, in coordinates "X", "Y" and "Z". Secondly, and making use of the Van Hiele model, five hierarchical levels of geometric reasoning are established, which make it possible to specify a didactic model that leads to better domains and understanding of the notions and capacities necessary for the realization of models or numerical data structures that represents the spatial distribution of the altitude of the earth's surface.

In this way, the present investigation becomes a model for carrying out engineering surveys, applicable in projects of routes, highways, dams, canals, aqueducts, oil pipelines, gas pipelines, architectural works, cadastral relaxations, geological studies, agricultural properties, characterization of land use, and all the possible activities of measurement to the affectations that the human being makes in the terrestrial surface.

The research was developed through a mixed approach, under the paradigm of complexity, with a non-experimental design, descriptive scope and with a documentary and survey technique, this allowed to determine the theoretical understandings by establishing a categorical map that later serves as input for the collection. of information in 19 universities worldwide where this subject was established in careers in engineering and earth sciences.

The data collected through a survey reached a 3% margin of error and 97% confidence, which allows analyzing the interpretations made by teachers and researchers, which served as input and verification for the formulation of a proposal based on the Van Hiele model. In this model, hierarchical levels of geometric reasoning are established, which lead to a better learning of advanced digital stereophotogrammetry.

As a projection, base elements are established for future studies in different sectors related not only to the technical area of photogrammetry and cartography, but also to pedagogy. Being an important element to be able to carry out a true transmission of knowledge and apply techniques that promote the basic element of planning, generating development in the community and the less favored population.

KEYWORDS: Photogrammetry, Stereophotogrammetry, Signs, Geometry, Van Hiele, Teaching, Didactics.

ÍNDICE

RESUMEN	V
ABSTRACT	VII
Listado de Figuras.....	12
Índice de Tablas.....	13
Índice de anexos.....	13
CAPÍTULO I	14
1. Introducción.....	14
1.1. Planteamiento del Problema.....	15
1.1.1. Descripción de la realidad problemática	15
1.2. Pregunta General.....	18
1.2.1. Preguntas Específicas.....	18
1.2. Objetivos.....	19
1.2.1. Objetivo General.....	19
1.2.2. Objetivos específicos.	19
1.3. Justificación	19
1.4. Alcances y limitaciones de la investigación	22
CAPÍTULO II	23
2. Marco Teórico.....	23
2.1. Antecedentes de la investigación	23
2.2. Teoría de Van Hiele.....	25
2.2.1. Propiedades de los niveles en la teoría de Van Hiele	26
2.2.2. Movimiento de un nivel al siguiente en la teoría de Van Hiele.....	27
2.2.3. Propiedades de la teoría Van Hiele	29
2.3. La estereofotogrametría.....	31
2.4. Métodos fundamentales	32
2.4.1. El proceso fotogramétrico	32
2.4.2. Aspectos de la fotogrametría	35
2.4.3. Técnicas de triangulación	36
2.1.1. Modelo de formación de imágenes.....	38
2.2. Fundamentación matemática.....	41

2.2.1.	Sistemas de Coordenadas.....	41
2.2.2.	Transformación de coordenadas.....	46
2.4.4.	Transformaciones espaciales.....	54
2.2.3.	Transformación de similitud espacial.....	63
2.4.5.	Proyecciones.....	70
2.3.	Técnicas de ajuste.....	73
2.4.6.	El problema.....	73
2.4.7.	Método de mínimos cuadrados (modelo lineal de Gauss-Markov).....	76
2.4.8.	Medidas de calidad.....	81
CAPÍTULO III.....		82
3.	Marco Metodológico.....	82
3.1.	Diseño metodológico.....	82
3.1.1.	Enfoque.....	82
3.2.	Diseño.....	83
3.3.	Alcance.....	83
3.4.	Técnica.....	84
3.4.1.	Técnica Documental.....	84
3.5.	Validación por expertos.....	85
3.6.	Diseño Muestral.....	86
3.6.1.	Definición del Universo (población - muestra).....	86
3.7.	Diseño general.....	94
3.8.	Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	94
3.8.1.	Descripción de instrumentos.....	94
3.8.2.	Comportamientos en cada nivel de Van Hiele.....	95
3.8.3.	Prueba de acceso a la geometría del estudiante.....	100
CAPÍTULO IV.....		102
4.	Resultados.....	102
4.1.	Interpretación y discusión de resultados.....	102
4.1.1.	Análisis de Componentes Principales - ACP.....	102
4.1.2.	Método factorial.....	103
4.1.3.	Interpretación de resultados con sistemas de Información Geográfica.....	107
4.1.4.	Análisis de componentes Georreferenciados.....	111

4.1.5.	Análisis de resultados de pruebas relacionadas en conocimiento de fotogrametría.....	115
CAPITULO V	120
5.	Conclusiones.....	120
5.1.	Líneas de Investigación futura.....	123
6.	BIBLIOGRAFIA.....	124
7.	ANEXOS.....	133
	Anexo 1 PRUEBA DE ACCESO ELEMENTAL DE GEOMETRÍA.....	134
	Anexo 2 . Prueba de conocimiento de elementos fotogramétricos.....	141
	Anexo 3. Evidencia fotográfica aplicación visualización en estéreo.....	160
	Anexo 4 Evaluación de expertos.....	164
	Anexo 5. Propuesta didáctica.....	169
	Propuesta didáctica.....	170
1.	Introducción.....	170
2.	Contenidos que se van a aprender.....	173
2.1.	Actividades.....	174
2.2.	Estrategias.....	175
2.3.	Recursos materiales necesarios.....	177
2.4.	Procedimiento para Identificación en medición de edificios.....	178
2.5.	Creación de Modelos de Edificación.....	179
2.6.	Separación de Medidas Terrestres y no Terrestres.....	180

Listado de Figuras

Figura 1 Componentes del modelo de Van Hiele.....	30
Figura 2 Imágenes fotogramétricas	33
Figura 3 Representación de objeto a imagen	34
Figura 4 El proceso fotogramétrico: del objeto al modelo	35
Figura 5 Relación entre el tamaño del objeto la precisión	36
Figura 6 Principio de medición fotogramétrica.....	39
Figura 7 Modelo de cámara estenopeica.....	39
Figura 8 Sistema de coordenadas de imagen y cámara	43
Figura 9 Sistema de coordenadas del comparador.....	44
Figura 10 Sistema de coordenadas del modelo	44
Figura 11 Sistemas de coordenadas de objetos.....	45
Figura 12 Sistema de coordenadas de instrumentos 3D	45
Figura 13 Transformación de similitud de plano.....	47
Figura 14 Transformación afín plana	48
Figura 15 Transformación polinómica plana.....	50
Figura 16 Transformación bilineal.....	51
Figura 17 Transformación proyectiva de plano.....	52
Figura 18 Proporciones cruzadas	53
Figura 19 Definición de ángulos de rotación espacial.....	54
Figura 20 Configuración de imagen donde $\omega = 0^\circ$, $\phi = 90^\circ$ y $\kappa = 90^\circ$	57
Figura 21 Cosenos de dirección.....	60
Figura 22 Transformación de similitud espacial.....	64
Figura 23 Cálculo de valores aproximados para la transformación de similitud 3D.....	65
Figura 24 Proyección isométrica	70
Figura 25 Proyección central.....	71
Figura 26 Países a los que pertenece las Universidades de este estudio	91
Figura 27 Países de las universidades donde se aplicó el instrumento	93
Figura 28 visualización espacial de desempeño, según prueba aplicada	107
Figura 29 Gráfico análisis de componentes principales - ACP	108
Figura 30 Análisis general de relación entre los niveles del modelo de Van Hiele.....	111
Figura 31 Análisis de relación entre los niveles 3 y 4 del modelo de Van Hiele	112
Figura 32 Análisis de relación entre los niveles 1 y 4 del modelo de Van Hiele	113
Figura 33 Análisis de relación entre los niveles 3 y 4 del modelo de Van Hiele	114
Figura 34. Resultados prueba conocimientos de fotogrametría	115
Figura 35 Comparación entre respuestas 1 y 3 de conocimientos de fotogrametría.....	117
Figura 36. Comparación entre respuestas 3 y 4 de conocimientos de fotogrametría.....	118
Figura 37 Comparación entre respuestas 2 y 4 de conocimientos de fotogrametría.....	118
Figura 38 Comparación entre respuestas 2 y 4 de conocimientos de fotogrametría.....	119
Figura 39 Esquema campo de calibración.....	174
Figura 40 Aplicación de Modelo Van Hiele para creación de edificación 3D.....	181

Índice de Tablas

Tabla 1 Clasificación de fotogrametría	38
Tabla 2 Universidades donde se enseña fotogrametría Digital	88
Tabla 3 Universidades donde se enseña fotogrametría Digital (2)	89
Tabla 4 Universidades donde se enseña fotogrametría Digital (3)	90
Tabla 5 Listado de universidades a las cuales se aplicó el instrumento	92
<i>Tabla 6 Resultados de las pruebas aplicadas en universidades</i>	105
<i>Tabla 7 Desempeño en las universidades según la prueba aplicada</i>	106

Índice de anexos

Anexo 1 Prueba de acceso elemental de geometría.....	133
Anexo 2 Prueba de conocimiento de elementos fotogramétricos	140
Anexo 3 Evidencia fotográfica aplicación visualización en estéreo	160
Anexo 4 Evaluación de expertos	164
Anexo 5 Propuesta didáctica.....	169

CAPÍTULO I

1. Introducción

La presente investigación es una contribución para el desarrollo de la estereofotogrametría a partir del planteamiento de propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, haciendo uso del modelo de Van Hiele, lo cual resuelve problemas existentes en relación a la comprensión de mediciones y localizaciones en la toma de datos topográficos. Este aporte se apoya en tres aspectos fundamentales, el primero en los referentes dados por el modelo de Van Hiele que estructura y facilita avanzar en la construcción de razonamientos geométricos de los estudiantes, que luego en el segundo aspecto se aplican en el manejo de recursos tecnológicos, los cuales abstraen y coadyuvan en el procesamiento de la información, para luego en un tercer momento realizar representaciones en planos de tres dimensiones.

De esta manera, según (Hamidah, & Kusuma, 2020) *se promueven el desarrollo de las competencias y capacidades de los estudiantes de ingeniería relacionadas con ciencias de la tierra*, se contó con un marco muestral dado a nivel mundial, recolectando información en cinco continentes y proponiendo con los hallazgos procesos que llevan a fortalecer las situaciones y los conceptos propios de la materia.

La propuesta se valida por cuatro expertos a nivel mundial recolectando las observaciones que llevan a optimizar los procesos de enseñanza y a la comprensión y asimilación mediante una estrategia didáctica que tiene características jerárquicas y secuenciadas, partiendo de la situación real del estudiante, de sus niveles de razonamiento geométrico, permitiéndole con ello fortalecer el razonamiento y alcanzar mejores aprendizajes de la estereofotogrametría.

El estudio conto con cuatro fases; la primera en relación al estudio de más de 180 documentos indexados en bases de datos de alto impacto, en la segunda fase se construyeron las categorías problémicas de la investigación, para la tercera se validaron y aplicaron instrumentos recolectando la información pertinente y en la cuarta se procedió a diseñar una propuesta que recoge las preocupaciones en la enseñanza de la estereofotogrametría a nivel mundial.

De esta manera en el presente documento se encuentra establecido el problema de investigación, los objetivos que lo direccionan, la justificación y los alcances y limitaciones de este. El segundo capítulo atiende el marco teórico establecido desde una irada epistemológica basada en la complejidad. Para el tercer capítulo se consignan los referentes metodológicos, las relaciones de marco muestral, enfoque, diseño, alcance y técnicas utilizadas. En un cuarto capítulo se establecen, analizan y discuten los resultados.

Así mismo en los anexos se presentan los instrumentos validados, las evaluaciones a la propuesta realizadas por un marco de expertos a nivel mundial que desde luego complementan y ponen a disposición un producto de generación de conocimiento para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la estereofotogrametría.

1.1. Planteamiento del Problema

1.1.1. Descripción de la realidad problemática

A nivel internacional y desde la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), de acuerdo con Ngirishi, & Bansilal (2019), *se aboga por la incorporación adecuada de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como herramientas indispensables para complementar, enriquecer y transformar la educación*, en este orden, Passos, Buriasco & Soares (2019), *indica la urgente necesidad de transformar la educación en todos los niveles*, para lo cual la enseñanza universitaria no es ajena, en tanto Pujawan, Suryawan, & Prabawati, (2020) *indica que en esta se requiere integrar las TIC desde perspectivas investigativas, didácticas y pedagógicas para que los procesos de aprendizaje sean pertinentes*, ya que en la actualidad y en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estereofotogrametría es pobre el uso de recursos de última tecnología, como también de software adecuado que permita hacer uso de modelos que lleven a los estudiantes a la comprensión de los fenómenos que se presentan en la fotogrametría digital avanzada.

En la actualidad y de acuerdo con Sulistiowati, Herman, & Jupri, (2019), *la enseñanza de la fotogrametría contempla múltiples problemas*; el primero de ellos es la débil

comprensión de procesos de modelado que permitan al estudiante reconocer con precisión las variables en el análisis de datos digitales de un sistema, que se reconoce y toma mediante mecanismos de elevación de datos o mediciones. En este proceso, de acuerdo con Risnawati, Andrian, Azmi, Amir & Nurdin (2019), *intervienen dificultades y problemas provenientes de aspectos tecnológicos, culturales y didáctica* que llevan a que la enseñanza de la estereofotogrametría tenga repercusión en aplicaciones en hidrología, gestión de recursos, determinación de uso y cubierta del suelo, clasificación y evaluación del impacto ambiental, registro de mapas base, gestión de aguas pluviales y evaluación de riesgo por inundaciones; estas desde la enseñanza de las ciencias de la tierra.

Nusaibah, Pramudya, & Subanti (2021), *de otra parte señalan que existen vacíos metodológicos para el uso de instrumentos y la aplicación de modelos* que lleven a estimar de manera precisa áreas, que desde el campo ambiental se requieran destacar, es el ejemplo de campos deforestados, cambios en las alturas, identificación de sectores de vegetación, procesos geomorfológicos, cambios topográficos y en general toda actividad de medición a áreas que por causas antropogénicas tengan alteración en la superficie de la tierra.

Estas problemáticas como destacan Miatun, Khusna, & Slamet (2021), *exige que los estudiantes sepan y desarrollen procesos de modelación* donde deben evidenciar capacidades para observar fenómenos, formular situaciones matemáticamente, emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamientos geométricos, siendo esta la base para la comprensión y el aprendizaje de la estereofotogrametría que les lleva a interpretar, aplicar y evaluar resultados en ejercicios de medición, hechos que según los autores se encuentran en deficiencia y causan dificultades en la aplicación de la misma.

Del mismo modo, Passos, de Buriasco, & Soares (2019), manifiestan que los estudiantes en el aprendizaje de la estereofotogrametría poseen baja habilidad para el análisis geométrico, lo que les lleva a baja capacidad en la toma de decisiones y el planteamiento de estrategias para la resolución de problemas en las mediciones. Estas actitudes son indispensables para una mejor comprensión y asimilación de las problemáticas que se presentan en el desarrollo de levantamientos topográficos, estos generalmente se realizan con equipos tradicionales y apegados a una metodología convencional, por lo cual son muy laboriosos y tediosos, los resultados de estas mediciones se hacen con el objetivo de mapear - cartografiar el terreno, a partir de la ubicación y toma de un conjunto de puntos con coordenadas "X", "Y" y "Z", que presentan errores porcentuales altos y bajo uso de herramientas tecnológicas.

Dicha problemática en palabras de Laily, Sunardi, Yuliati, Imamah, & Sari (2020), *debe valorarse y convertirse en nueva estrategia que lleve mejores análisis espaciales de variables como la altitud de la superficie terrestre*, la concreción de mapas derivados y la utilización y optimización de software de dibujo asistido por computadora CAD, por sus siglas en inglés Computer Assisted Drawing. En este caso es importante mencionar que la calidad de la toma de datos depende directamente de la precisión del equipo, de las habilidades para este caso del estudiante y el número de puntos medidos el cual es a la vez una habilidad que puede determinar un modelo en la toma de los datos.

En este orden Francelino, Martins y Blando (2019) señala la problemática y la urgente necesidad de desarrollar procesos metodológicos y didácticos que faciliten mejores representaciones matemáticas que conlleven a que los estudiantes de fotogrametría reconozcan las variables de un fenómeno, esquematicen los componentes que intervienen en una toma de representaciones y con ello a partir del uso de software especializado generen nuevas comprensiones, en este renglón las soluciones para las dificultades en la enseñanza de la fotogrametría y la estereofotogrametría deben llevar al uso de tecnologías relacionadas con el contexto de la Industria 4.0, por ello en la problemática se ubica el uso deficiente de modelos didácticos que lleven a la comprensión de fenómenos, el mal y débil uso de software para los procesos de medición.

Al respecto Xiao y otros (2022), determina que la enseñanza de las ciencias de la tierra exigen ser relacionadas a partir de aplicación de nuevas tecnologías que permitan mejores interpretaciones, mayor actualización y eficiencia en el desarrollo de habilidades para la toma de datos, en este orden ha surgido la denominada fotogrametría digital, aspecto con enormes desafíos debido a que los grandes problemas en la enseñanza y el aprendizaje radican en el fortalecimiento de habilidades para la toma de mediciones con exactitud. En este caso es necesario recordar la existencia de técnicas para la enseñanza de la fotogrametría, casi todas en una o dos dimensiones, las cuales se han desarrollado desde diversas escuelas basadas en procedimientos lineales que no pueden soportar o controlar variables planimétricas X y Y, al tiempo con variables altimétricas en eje Z.

En este sentido Muñoz (2019) enuncia que las técnicas tradicionales utilizadas para la enseñanza de la fotogrametría se basan en técnicas análogas, igualmente señala que en la enseñanza de la fotogrametría digital se identifican innumerables deficiencias

que parten de la incapacidad de llevar a los estudiantes a comprender las relaciones bidimensionales y tridimensionales. Esta insuficiencia afecta los resultados de en la comprensión del fenómeno, en la producción cartográfica y en el cumplimiento de los estándares de precisión exigidos en las normativas locales e internacionales al realizar labores en dicho campo.

Al respecto Jesús y otros (2019) señalan grandes problemáticas en la enseñanza de la fotogrametría ya que existen dificultades en la creación de modelos tridimensionales con características realistas y de fácil manipulación, así mismo existen dificultades en el manejo de software para la realización de la renderización y de la construcción de piezas virtuales, este proceso que en la mayoría de los casos llega a tardar meses, incrementando el costo y eliminando la facilidad de realización.

Por lo anterior la formulación del problema está dada bajo la siguiente pregunta de investigación:

1.2. Pregunta General

¿Cuáles son los factores para el diseño de una estrategia didáctica que fortalezca la enseñanza de la estereofotogrametría, tomando como base el modelo de Van hiele en estudiantes de fotogrametría digital avanzada?

1.2.1. Preguntas Específicas

¿Cuáles son los referentes teóricos, didácticos y tecnológicos que se pueden aplicar en la enseñanza de la estereofotogrametría en estudiantes de Fotogrametría digital avanzada?

¿Qué características tienen los procesos de aprendizaje de la estereofotogrametría a nivel mundial, sus problemáticas y retos para los estudiantes de fotogrametría digital avanzada?

¿Cuáles son los factores a tener en cuenta en la formulación de una propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, teniendo como base el uso del modelo Van Hiele, en estudiantes de fotogrametría digital avanzada?

1.2. Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos de la investigación mostrando las características específicas de la investigación e integrándolos con los elementos relacionados en la pregunta de investigación planteada y teniendo en cuenta las variables de estudio.

1.2.1. Objetivo General

Formular una propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, a partir de la aplicación del modelo de Van Hiele, en estudiantes de fotogrametría digital avanzada.

1.2.2. Objetivos específicos.

Reconocer los elementos teóricos, didácticos y tecnológicos aplicados a la enseñanza de la fotogrametría, que contribuye al fortalecimiento del aprendizaje en estudiantes de fotogrametría digital avanzada.

Caracterizar los procesos de aprendizaje de la estereofotogrametría en estudiantes de fotogrametría digital avanzada.

Validar la propuesta didáctica generada para la enseñanza de la estereofotogrametría, teniendo como base el uso del modelo Van Hiele, en estudiantes de fotogrametría digital avanzada.

1.3. Justificación

De acuerdo con lo reconocido anteriormente el problema de la presente investigación configura un modelo didáctico que permita el aprendizaje de la estereofotogrametría, incorporando adecuadamente elementos teóricos, conceptuales y epistémicos que atacan una problemática basada en la poca comprensión de fenómenos que ocurren

en la toma de mediciones y datos para el levantamiento de planos.

En este orden se requiere un modelo que lleve a mejores comprensiones geométricas que fortalezcan el pensamiento matemático, donde de acuerdo con, *. para que los estudiantes puedan asumir la aplicación de herramientas Tecnologías como insumo indispensable para complementar, enriquecer y transformar su aprendizaje*, estas en primera instancia mediante el uso de software y luego con el uso de técnicas de triangulación de señales que les lleva a un aprendizaje pertinente, actual y avanzado.

En virtud de lo anterior la presente investigación realiza aportes significativos en la toma de mediciones sobre fotografías, razón por la que se establece un nuevo modelo de enseñanza de fenómenos estereoscópicos que permitan generar una mayor precisión en las medidas y mejor comprensión del contexto de los elementos que son capturados en las fotografías.

El presente trabajo genera un aporte para que se pueda realizar mediciones en modelos estereoscópicos construidos con fotografías aéreas verticales; los planteamientos generados en el desarrollo de las labores realizadas traen como consecuencia, poder obtener mayor nivel de precisión en el cálculo de las distancias, las áreas, y volúmenes de zonas de interés. En la era de implementación tecnológica que se está viviendo en el mundo, es evidente que existe una gran diferencia si se toman medidas en dos dimensiones, o si las medidas son tomadas de manera tridimensional.

En este sentido la investigación se concentrará en estudiar y proponer una estrategia didáctica que lleva a describir con precisión y uso de argumentos geométricos la interpretación de objetos espaciales, desde este punto de vista Según, Ni'mah, Susanto, Sunardi & Hobri (2020), *los aportes además de metodológicos, contribuyen a mejorar las prácticas y a fortalecer las habilidades que les permita realizar mediciones más confiables y precisas.*

Es de subrayar que todos los sujetos muestrales participantes en este estudio, tienen desde el punto de vista técnico, un bagaje que les permite participar entender y mejorar su desempeño académico, si se utilizan de manera correcta los postulados de la teoría Van Hiele. La novedad considerada en la variable independiente, es decir la propuesta didáctica, tiene un aporte significativo en la enseñanza de la estereofotogrametría, en

razón a que toma una parte del conocimiento desarrollado en la teoría Van Hiele y lo coloca al servicio de un proceso de enseñanza que en principio se puede visualizar como muy complejo.

En concordancia con, Rahayu, & Jupri (2021), *el proceso de investigación tiene una utilidad significativa dado que resuelve un problema que se ha planteado desde hace mucho tiempo*, relacionado con entender la geometría básica que existe para tomar fotografías individuales y realizar modelos estereoscópicos; teniendo en cuenta aspectos fundamentales relacionados con el centro proyección, el punto en el terreno y el punto en la fotografía que representa el terreno, teniendo en cuenta la integralidad y la relación entre cada uno de ellos, soportado en las ecuaciones de colinealidad.

El proyecto tiene una consideración viable, dado que se realiza con usuarios de las técnicas fotogramétricas, quienes en realidad son los que hacen los análisis geométricos y los cálculos matemáticos para que se puedan obtener precisiones adecuadas en el momento de generar cartografía. La investigación tiene acceso a una muestra, en donde los sujetos muestrales trabajan cotidianamente y se aplican los instrumentos de manera correcta a la población indicada en el desarrollo del trabajo. Se puede tener acceso a los sujetos muestrales gracias a la cercanía con el área de estudio y con los especialistas del área de fotogrametría digital avanzada. Es tan amplia la aplicación del instrumento en el campo de trabajo, que es posible colocarlo en idioma inglés, para que sea tenido en cuenta en las universidades que imparten fotogrametría digital avanzada en este idioma.

1.4. Alcances y limitaciones de la investigación

Esta investigación se delimita en un campo específico para poder obtener todos los parámetros técnicos en el desarrollo de la estereofotogrametría, que es el soporte fundamental para poder realizar cartografía de la manera técnica más adecuada, permitiendo obtener resultados finales con las precisiones convenientes, normalmente emitidas por la ISPRS (International Society for Photogrammetry and Remote Sensing) o densificadas por la ASPRS (American Society for Photogrammetry and Remote Sensing).

Se puede indicar que no es un problema aislado, si no se cumplen los estándares definidos, el producto final cartográfico tendrá deficiencias, que redundan en la no aprobación oficial que puedan dar las diferentes autoridades para que sea incorporado el producto. Cómo la reglamentación para poder aprobar productos cartográficos derivados de la fotogrametría es de carácter internacional, la investigación se limita a los expertos en áreas relacionadas con la materia, para lo cual se ha llegado al núcleo de las universidades que imparten esta disciplina.

Como limitación de la investigación es importante hacer referencia a la necesidad de establecer los contactos con docentes de diferentes universidades en medio de la situación generada por la pandemia del COVID-19 en el momento del estudio, ya que en época de pandemia era requerido hacer contacto directo con los especialistas en el área, para poder ver las particularidades del constructo.

Otra limitación tiene que ver con la fluida comunicación que pueda haber en las universidades que desarrollan la temática, quienes no solamente trabajan en inglés sino también en otros idiomas, no siendo posible para todos los dominios de esos diferentes idiomas.

CAPÍTULO II

2. Marco Teórico

En este apartado se presentan los diferentes aspectos teóricos relacionados con la teoría de Van Hiele, fotogrametría y su relación con estereofotogrametría y los aspectos teóricos más importantes de la didáctica específica. Para el caso se estructuran los aspectos fundamentales; niveles, propiedades y fases del modelo, los referentes geométricos y matemáticos que enlazan las posibilidades de aprendizaje y su relación con la estereofotogrametría. Así mismo se condensan los aspectos relacionados a tener en cuenta para el diseño de una propuesta didáctica.

Este capítulo tiene en cuenta los aspectos metodológicos, tecnológicos y teóricos para fortalecer el proceso de aprendizaje; la existencia de los niveles y su descripción, complementado con las propiedades de los niveles, los aspectos a tener en cuenta para moverse de un nivel a otro y las propiedades de la teoría propiamente dicha se encuentran en relación al objetivo de la propuesta.

De esta manera el marco teórico relaciona los elementos de estereofotogrametría y su participación en fotogrametría digital avanzada desde la postulación del modelo de Van Hiele, permitiendo la estructura de la propuesta.

2.1. Antecedentes de la investigación

El modelo Van Hiele consiste en poder dar solución a los problemas presentados por parte de profesores en el momento de interactuar con sus estudiantes, dado que los profesores tienen temores en problemas elementales cuando se quiere conseguir que los estudiantes tengan la capacidad de comprender un concepto nuevo. Los estudiantes pueden tener el concepto, pero únicamente pueden usarlo en ejemplos iguales a los que ha postulado el profesor, los estudiantes pueden resolver problemas específicos hábilmente, pero no tienen idea para resolver problemas similares, en un contexto diferente. En el contexto nacional, se puede mencionar que según, Therán-Palacio (2021), *para Colombia se ha trabajado con el modelo Van Hiele principalmente en áreas relacionadas con las tecnologías computacionales, matemáticas y la enseñanza de la geometría en la educación básica secundaria*, entre

otras. No se conoce referente en el área específica Universitaria del contexto de la fotogrametría. Por otra parte, Internacionalmente, según Risnawati, Andrian, & Nurdin (2019), *hay una evidente utilización del modelo Van Hiele en diferentes ámbitos universitarios y de carreras relacionadas con medicina, antropología, ingeniería e incluso las ciencias humanas*, generando una confianza en su utilización y una dinámica constante afirmado por el alto número de trabajos que se encontraron especialmente de los últimos 3 años.

Otra situación es que, en las clases relacionadas con matemáticas y geometría, e incluso en fotogrametría los estudiantes deben memorizar demostraciones de los teoremas, para resolver problemas; convirtiéndose en una de las alternativas para aprobar los exámenes.

Documentado lo anterior, se indica que no es un problema reciente, ni particular de profesores de una zona, este problema se da a nivel del mundo. Los profesores holandeses, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, hace más de 70 años, se introducen a estudiar de fondo la situación y esta manera procurar entregar una solución, cómo lo comenta detalladamente el propio Pierre Marie Van Hiele "*Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que, de mostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me parecía que comprendían la materia en cuestión. Podía hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: "no es tan fácil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada? En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento"*

2.2. Teoría de Van Hiele

Lo que se conoce como la teoría del nivel de Van Hiele se desarrolló por Dina van Hiele-Geldof y su esposo Pierre Marie Van Hiele en disertaciones doctorales separadas en la Universidad de Utrecht en 1957. En los años 1958-59, él escribió tres artículos (dos en inglés, uno en holandés, pero traducido al francés) que recibieron poca atención en Occidente, pero se aplicaron en desarrollo curricular por el académico soviético, según Dewi, Sunardi, Irvan, & Rohmah (2020), *el mentor de los van Hieles, hizo pública la teoría en su conocido libro Matemáticas como tarea educativa*. De acuerdo con Agustiniingsih, Susanto & Yuliati (2019), *la obra de los van Hieles llegó a la atención de k. Wirszup*, quien fue el primero en hablar sobre el Van Hiele teoría en este hemisferio en 1974. Según, Fitriyani, Yudianto, Fiantika, & Hariastuti (2020), *se escribió un texto de geometría para la escuela secundaria (1979)* en el que dedica tiempo y visitó a Van Hiele en Países Bajos, y escribió sobre los niveles en 1981. *Dos proyectos que tratan aspectos de la teoría fueron financiados, según, Mbusi, & Luneta (2021)*.

La teoría Van Hiele tiene tres aspectos: 1. La existencia de niveles, 2. propiedades de los niveles, 3. El movimiento de un nivel al siguiente. En primer término, en la existencia de niveles, según la teoría, reafirmado por Rohmah, Sunardi, Irvan, Hobri, & Dewi, (2020), *hay cinco niveles de comprensión en geometría*. Estos niveles son descritos por los .Van Hiele en varios lugares, tanto en términos generales como de comportamiento.

Nivel 0: (Visualización o reconocimiento) El estudiante puede aprender nombres de figuras y reconoce una forma como un todo. (Los cuadrados y los rectángulos parecen ser diferentes).

Nivel 1: (análisis) El estudiante puede identificar propiedades de figuras (Los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos.)

Nivel 2: (ordenar o clasificar) El alumno puede ordenar lógicamente las figuras y relaciones, pero no opera dentro de un sistema matemático (La deducción simple

puede ser entendida, pero la prueba no)

Nivel 3: (deducción Formal) El estudiante entiende el significado de la deducción y el papel de los postulados, teoremas y demostración. (Las demostraciones se pueden escribir con comprensión.)

Nivel 4: (rigor) El alumno comprende la necesidad de rigor y es capaz de hacer deducciones abstractas. (Se puede entender la geometría no euclidiana).

Los van Hiele numeran estos niveles del 0 al 4, no del 1 al 5, Dina Van Hiele llamo los niveles 2 al 5, el aspecto de la geometría, *la esencia de la geometría, comprensión de la teoría de la geometría y conocimiento científico de la geometría, según Kandaga, Rosjanuardi, & Juandi (2022).*

2.2.1. Propiedades de los niveles en la teoría de Van Hiele

Es inherente a la teoría de Van Hiele para comprender la geometría y una persona debe pasar por los niveles en orden. Llamando a esto, la propiedad de secuencia fija de los niveles.

Propiedad 1: (secuencia fija) Un estudiante no puede estar en un nivel n Van Hiele sin haber pasado el nivel $n-1$. P.M. Van Hiele (1958-59) identifica otras propiedades de los niveles, a los que ha asignado.

Propiedad 2: (adyacencia) En cada nivel de pensamiento lo que era intrínseco en el nivel anterior se convierte en extrínseco en el nivel actual.

Propiedad 3: (distinción) Cada nivel tiene su propia lingüística símbolos y su propia red de relaciones conectando esos símbolos.

Propiedad 4: (separación) Dos personas que razonan en diferentes niveles no pueden entenderse entre sí.

Según Peña, & Ortega (2022), *Para ejemplificar estas propiedades, se puede considerar un estudiante que comenta a un profesor de geometría, "Puedo seguir una demostración cuando la hace en clase, pero no puedo hacerlo en casa"*. Este estudiante puede estar en el nivel 3, mientras que el profesor está operando en el nivel 4. La propiedad 4 indica que el estudiante no puede entender al profesor, y la propiedad 3 explica por qué no entiende, al estar usando objetos (proposiciones, en el caso de prueba) y una red de relaciones (la prueba misma) que el estudiante aún no entiende usado de esta manera. Si el estudiante está en el nivel 3, entonces la red del estudiante consiste en un simple ordenamiento de proposiciones, y la Propiedad 2 indica que estos ordenamientos intrínsecos al nivel 3, pueden volverse extrínsecos en el nivel 4.

2.2.2. Movimiento de un nivel al siguiente en la teoría de Van Hiele

Por su parte, Roldán & Perea (2022), *comentan que, Van Hiele en 1959, es más optimista que Piaget*, creyendo que el desarrollo cognitivo en geometría puede ser acelerado por instrucción. Naufal, Abdullah, Osman, Abu, Ihsan, & Rondiyah (2021), *enuncian que los Van Hieles han dado explicaciones detalladas de cómo el profesor debe operar para llevar a los estudiantes de un nivel al siguiente*. Considerándose esta especificación como la quinta propiedad de los niveles.

Propiedad 5: (logro) El proceso de aprendizaje que conduce a comprensión completa en el siguiente nivel superior tiene cinco fases, no estrictamente secuenciales:

Consulta
orientación dirigida
explicación
orientación libre
integración

Este estudio no tiene la intención de examinar el movimiento de un nivel al siguiente, por lo cual no se enfatiza en el tema. No obstante, se indica que los escritos de los Van Hiele, sirven para indicar que el proceso de pasar de un nivel al siguiente, lleva

tiempo considerable y requiere dedicación. Por ejemplo, Uyen, Ngan, Thao & Tong (2021), aseguran que *Dina Van Hiele en 1957*, reporta 20 lecciones para pasar del nivel 1 al nivel 2 y 50 lecciones para pasar del nivel 2 al nivel 3, trabajando, con niños de 12 años. Esto es aproximadamente medio año de lecciones si se estudia continuamente.

2.2.3. Propiedades de la teoría Van Hiele

Según, Zhou, Liu, & Lo (2022), *presentan que de las descripciones de Van Hiele dadas, se evidencia que esta teoría distingue tres atractivas características: elegancia, amplitud, y amplia aplicabilidad*. Por elegancia se entiende que la teoría implica una estructura bastante simple, descrita por declaraciones razonablemente sucintas, cada uno con amplio efecto. Por ejemplo, los mismos principios se aplican a movimiento del nivel 1 al 2, como del 2 al 3 y así sucesivamente, mostrando una elegancia de la forma. La simplicidad de la estructura es evidente cuando se señala que las cifras del nivel 1 son los componentes básicos de las propiedades en el nivel 2, que a su vez se ordenan en el nivel 3, siendo la ordenación esencial para la comprensión de un sistema matemático en el nivel 4, y uno de esos objetos es comparado con el nivel 5.

Cualquier teoría que cubra la totalidad del aprendizaje de la geometría, y que busca explicar no sólo por qué los estudiantes tienen problemas para aprender, pero también lo que podría hacerse para eliminar estos obstáculos, debe ser llamado comprensivo. de acuerdo con Wijaya, Sunardi, Yudianto, Cahyanita, & Aini (2021), *Pierre Marie Van Hiele afirma que la teoría se aplica a toda la comprensión matemática* y da ejemplos que implican el aprendizaje de funciones y nociones de otros no-geométricos. Sin embargo, Rahman, Susanto, Hobri, Irfan, & Albab (2020), afirman *que la teoría no ha sido lo suficientemente detallada en otras áreas para que sea tan completo*. Con los intentos de aplicar la teoría en los currículos de geometría en países tan diversos como los Países Bajos, Rusia y Estados Unidos, la teoría es obviamente vista como amplia y fácilmente aplicable. Significativamente, estas propiedades de una teoría (elegancia, amplitud y amplia aplicabilidad) no se probarán fácilmente. Sin embargo, son probablemente las principales razones de la velocidad con que la teoría de Van Hiele se ha dado Globalmente. Por lo tanto, Hassan, Abdullah, & Ismail (2020), *coincide que muchos profesores de matemáticas están aceptando y utilizando esta teoría*. Sobre la base de las características de la teoría en lugar de una prueba de sus componentes individuales. Una situación análoga sería si alguien tuviera una teoría para curar todo el cáncer, requiriendo simplemente la introducción de una única sustancia en el torrente sanguíneo de alguna manera cuidadosamente administrada. Eso sería una cura elegante, y completa en el sentido de que se aplicaría a todos los cánceres. Si se aceptara en muchos lugares, la teoría habría adquirido la cualidad de ser ampliamente aplicable. Pavlovičová, & Bočková (2021), *manifiestan que el hecho de que una teoría sea elegante completa, y haya sido utilizada por muchos, no asegura que la teoría sea*

correcta. En la situación médica, se buscan experimentos que pongan a prueba la capacidad de la teoría para satisfacer sus afirmaciones.

La teoría de Van Hiele, según Machisi (2021), *incluye descripciones de los comportamientos de los estudiantes en varios niveles y predice otros comportamientos de esos alumnos*. La descripción, a precisión descriptiva y el poder predictivo son atributos importantes de las teorías que pretenden ser científicas (a diferencia de las teorías que sólo son especulativas). En la figura 1, se presenta un claro resumen de los niveles, las propiedades y las fases de la teoría Van Hiele.

El propósito fundamental de este proyecto es probar la capacidad de la teoría de Van Hiele para describir y predecir el rendimiento de los alumnos que estudian el principio de estereofotogrametría en la asignatura de fotogrametría Digital. Las 5 primeras preguntas del instrumento aplicado en este estudio, están diseñadas para nivel de cada alumno y comprobar la propiedad de secuencia fija de los niveles. Las preguntas 6 a 10 ponen a prueba la capacidad de los niveles Van Hiele para predecir el rendimiento en geometría. Las preguntas 11 a 15, se refieren a la propiedad de separación de los niveles y proporcionan una prueba menos formal de la validez de esa conducta.

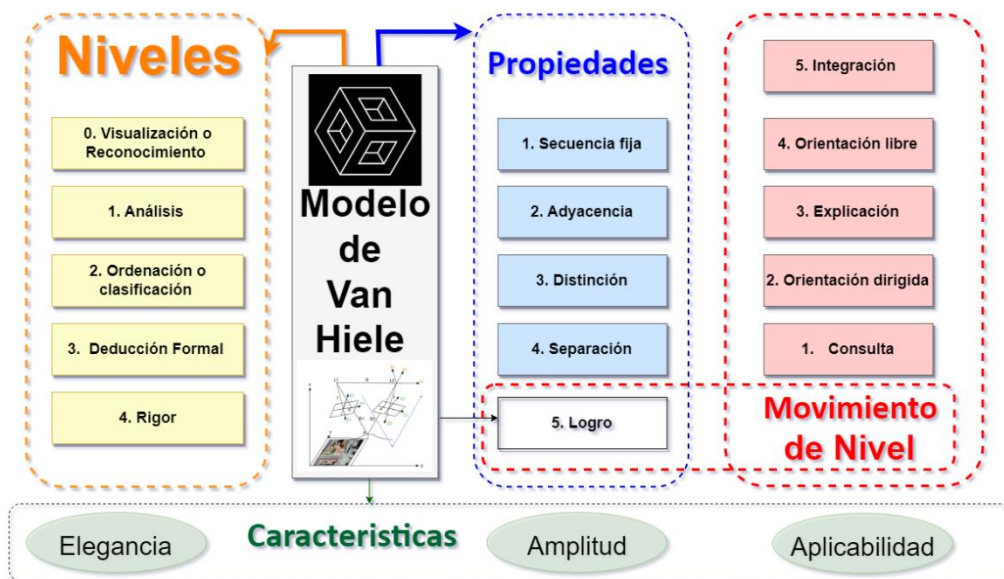


Figura 1 Componentes del modelo de Van Hiele

2.3. La estereofotogrametría

La estereofotogrametría presenta alta relevancia dentro de la fotogrametría, en razón a que, de acuerdo, con Pan, & Wang (2022), *involucra el uso de coordenadas tridimensionales de los puntos medidos en objetos de interés*; haciendo que *en dos o más fotografías se vean las mismas zonas en imágenes que han sido tomadas de diferentes posiciones*, según Wang, Tao, Gong, & Yin (2020). Teniendo en cuenta lo manifestado por Pepe, & Costantino (2020), Karami, Menna, Remondino, & Varshosaz (2022), y Herban, Costantino, Alfio, & Pepe (2022), *es posible identificar plenamente puntos comunes en cada una de las imágenes, permitiendo construir una línea de visión desde la ubicación de la cámara hasta el punto identificado en el objeto*, esta triangulación que se forma permite determinar la ubicación en tercera dimensión del punto. Por todas estas razones, de acuerdo a Karami, Menna, & Remondino (2022), Brezzi, Gabrieli, Cola, Lorenzetti, & Allegrini (2020), Ngeljaratan, & Moustafa (2022), *la estereofotogrametría está germinando como una técnica que consolida la medición y cálculo de las características dinámicas y las formas de las estructuras sin tener contacto directo con el objeto*.

La estereofotogrametría, según Hu, WagleyRioboo, Dasilva, & Kovelman (2020), Alfio, Costantino & Pepe (2020), Huang & Qin (2020), *se fundamenta en los principios estereoscópicos que permiten crear sensación de profundidad en una imagen*. Al igual que Moyano, Nieto-Julián, Lenin & Bruno (2022), presenta que *la visualización de alta precisión, está basada en el principio en donde se presentan dos diferentes imágenes de manera separada, una para el ojo izquierdo y para el ojo derecho*. Paralelamente, haciendo que el cerebro de quien está interpretando las imágenes las pueda combinar ofreciendo la percepción de la visión 3D. Como lo anota, Parr, Legg, & Alam (2022) y Zhang, Peng, Wu, & Li (2022), *existe diferentes mecanismos para la presentación de imágenes estereoscópicas*, sin duda alguna la más común se llama "técnica estereoscópica" y se puede mencionar la polarización, el anaglifo, la profundidad de croma y la tecnología lenticular, entre otros.

La fotogrametría de corto alcance maneja los mismos principios de la fotogrametría aérea convencional, de acuerdo con Sabato, Valente, & Niezrecki (2020) y Barreto, Perez-Gonzalez, & Huegel (2022), *maneja distancias más cortas y realiza una conmutación de ejes para su correcta representación*. Presenta diferentes usos, dentro de los cuales se puede destacar la aplicación de fotografías tomadas con una alta

velocidad de exposición que permita, según Guo, Liu, Hassan, Bhatt & Buttar (2022) y She, Weiß, Song, Urban, Greinert & Köser (2022), *detectar medir y registrar objetivos en movimiento teniendo un control en dos dimensiones y 3 dimensiones*, además Wang, & Chen (2020) y Hu, Liang, Feng, Yin, & Zuo (2022), *indican que sirve como soporte para el análisis de modelos computacionales, permitiendo estimar con precisión movimientos reales en 3 dimensiones*.

Actualmente las estaciones fotogramétricas digitales, según Paixão, Muralha, Resende, & Fortunato (2022), *utilizan sistemas de visión estereoscópica, que permiten a la fotogrametría la construcción de curvas de nivel en mapas topográficos, garantizando niveles de precisión para trabajos en detalle de ingeniería*. Y en tecnologías emergentes como: sonar lidar, y radar, según Zhang, Yang, Li, Zhao, Song, Zhang, Zhang (2022), *se han convertido en una de las opciones más preponderantes para realizar mediciones con altos estándares de precisión*.

2.4. Métodos fundamentales

En fotogrametría en general es importante tener una visión global de los fundamentos de la fotogrametría, con especial referencia a las fotografías aéreas verticales. Teniendo en cuenta los principales métodos y sistemas que puedan presentar las aplicaciones típicas. Para el trabajo desarrollado es esencial los fundamentos matemáticos, que, según Yan, Ren, Liu, Zhang, Chen, Wang, & Song (2022), *incluyen la definición de algunos sistemas de coordenadas importantes y la derivación de transformaciones geométricas* que pueden ser integrados con la teoría de niveles de Van Hiele. Para el trabajo específico de la competencia se hace necesario tener en cuenta según, Li, Wu, Liu, & Chen (2022), *aspectos del ajuste de mínimos cuadrados y las estadísticas, complementados con una serie de elementos geométricos importantes utilizados para la representación de objetos*.

2.4.1. El proceso fotogramétrico

La fotogrametría, según Specht, Wiśniewska, Specht, Szostak, Lewicka, & Halicki (2022), Isa, Sims-Waterhouse, Piano, & Leach (2020), Cao, Ding, Chen, Liu, Guo, Huang, & Yang (2022), Liu & Li (2022), *abarca métodos de medición e interpretación de imágenes para derivar la forma y ubicación de un objeto a partir de una o más fotografías de ese objeto*. En principio, los métodos fotogramétricos se pueden aplicar

en cualquier situación en la que el objeto a medir pueda ser registrado fotográficamente. Según Slocum, Parrish, & Simpson, (2020), *el propósito principal de una medición fotogramétrica es la reconstrucción tridimensional de un objeto en forma digital (coordenadas y elementos geométricos derivados) o forma gráfica (imágenes, dibujos, mapas)*. La fotografía o imagen representa un almacén de información al que se puede volver a acceder en cualquier momento.

La figura 2, muestra ejemplos de imágenes fotogramétricas. Según Zhu, Wang, Hu, Xie, Ge & Zhang (2020), Barreto, Perez-Gonzalez, Herr, & Huegel (2022), *la reducción de un objeto tridimensional a una imagen bidimensional implica una pérdida de información*. Las áreas de objetos que no son visibles en la imagen no se pueden reconstruir a partir de ella. Esto no solo incluye partes ocultas de un objeto, como la parte trasera de un edificio, sino también regiones que no se pueden reconocer debido a la falta de contraste o al tamaño limitado, por ejemplo, ladrillos individuales en la fachada de un edificio. Afirma Chang, & Lin (2022), *que mientras que la posición en el espacio de cada punto en el objeto puede definirse por tres coordenadas; solo hay dos coordenadas disponibles para definir la posición de su imagen*. Según Li, Wang, & Fang (2022) y He, Li, Jiang, & Jiang (2022), *hay cambios geométricos causados por la forma del objeto, el posicionamiento relativo de la cámara y el objeto, la imagen en perspectiva y los defectos de la lente óptica*. Finalmente, también hay cambios radiométricos (color) ya que la radiación electromagnética reflejada registrada en la imagen se ve afectada por los medios de transmisión (aire, vidrio) y el medio de grabación sensible a la luz ya sea en una película o en un sensor electrónico.

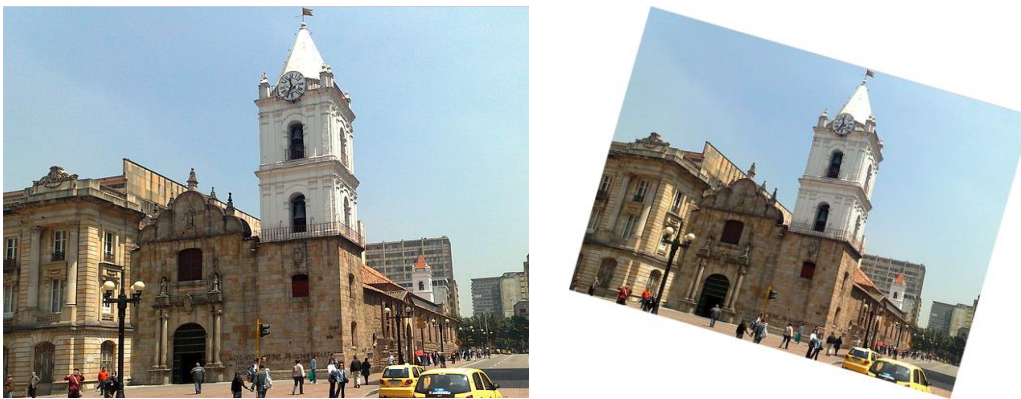


Figura 2 Imágenes fotogramétricas

Para Geng, Xu, Wang, Lan, & Xing (2022), *la reconstrucción de un objeto a partir de fotografías o imágenes es necesario describir el proceso óptico por el cual se crea una imagen*. Esto incluye todos los elementos que contribuyen a este proceso, como las fuentes de luz, las propiedades de la superficie del objeto, el medio a través del cual viaja la luz, la tecnología de sensores y cámaras, el procesamiento de imágenes, el desarrollo de películas y el procesamiento posterior como se ven en la (Fig. 3).

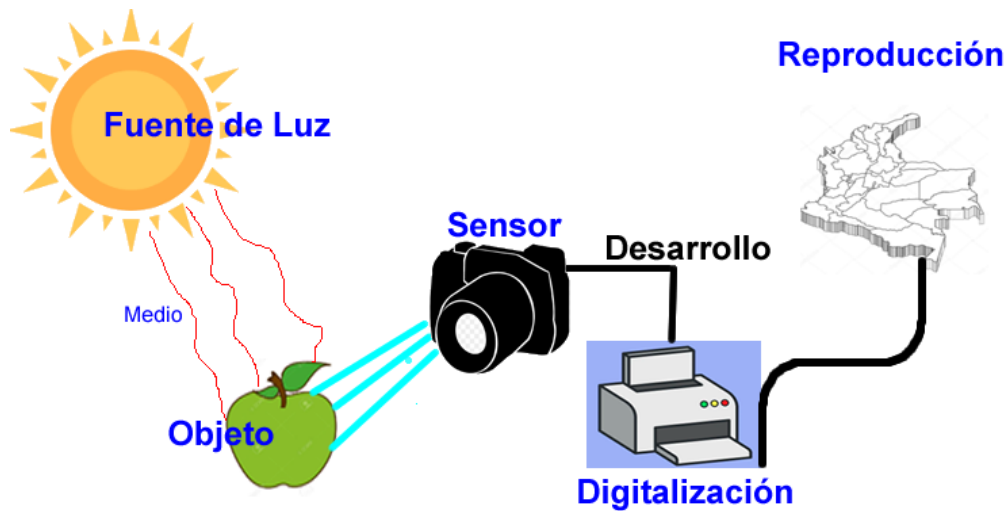


Figura 3 Representación de objeto a imagen

Es claro que se requieren métodos de interpretación y medición de imágenes que permitan identificar la imagen de un punto objeto a partir de su forma, brillo o distribución de color. Para cada punto de imagen, se pueden obtener valores en forma de datos radiométricos (intensidad, valor gris, valor de color) y datos geométricos (posición en la imagen). Esto requiere sistemas de medición con la calidad geométrica y óptica adecuada.

A partir de estas mediciones y una transformación matemática entre la imagen y el espacio del objeto, el elemento finalmente puede ser modelado.

La Fig. 4 simplifica y resume esta secuencia. El lado izquierdo indica la instrumentación principal utilizada, mientras que el lado derecho indica los métodos involucrados. Junto con los modelos físicos y matemáticos, el conocimiento humano, la experiencia y la habilidad juegan un papel importante. Determinan la medida en que el modelo reconstruido corresponde al objeto fotografiado o cumple los objetivos de la tarea.

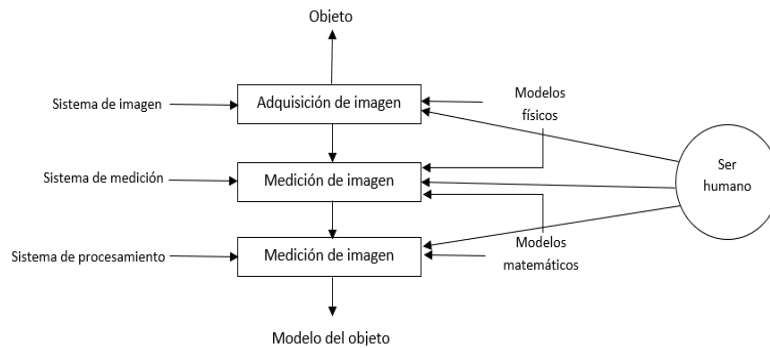


Figura 4 El proceso fotogramétrico: del objeto al modelo

2.4.2. Aspectos de la fotogrametría

Debido a sus variadas aplicaciones, la fotogrametría tiene un fuerte carácter interdisciplinario. No solo hay conexiones cercanas con otras técnicas de medición, sino también con ciencias fundamentales como las matemáticas, la física, las ciencias de la información o la biología.

De acuerdo con Ling & Qin (2022), *la fotogrametría tiene vínculos significativos con aspectos de la ciencia gráfica y fotográfica*, por ejemplo, gráficos por computadora y visión por computadora, procesamiento digital de imágenes, diseño asistido por computadora (CAD), sistemas de información geográfica (SIG) y cartografía.

Tradicionalmente, también hay fuertes asociaciones de fotogrametría con las técnicas de topografía, particularmente en las áreas de métodos de ajuste y topografía de ingeniería. Con la creciente aplicación de la fotogrametría a la metrología industrial y el control de calidad, se han creado enlaces en otras direcciones.

La Fig. 5 da una indicación de la relación entre el tamaño del objeto medido, la precisión de medición requerida y la tecnología relevante. Aunque no existe una definición dura y rápida, se puede decir que la fotogrametría de corto alcance se aplica a objetos que varían de 1 m a 200 m de tamaño, con precisiones inferiores a 0,1 mm en el extremo más pequeño (industria manufacturera) y una precisión de 1 cm en el extremo más grande (arquitectura e industria de la construcción).

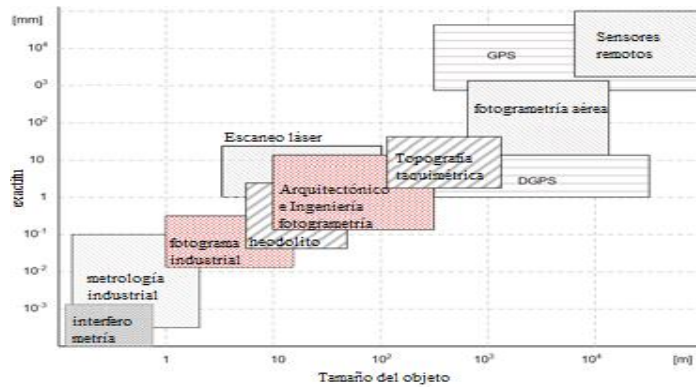


Figura 5 Relación entre el tamaño del objeto la precisión

Los métodos ópticos que utilizan la luz como portador de información, se encuentran en el corazón de las técnicas de medición 3D sin contacto. Según Liu & Wu (2020), *las técnicas de medición mediante ondas electromagnéticas pueden subdividirse*. Las técnicas basadas en ondas de luz son las siguientes:

2.4.3. Técnicas de triangulación

Fotogrametría (imagen simple, estéreo y múltiple), sistemas de medición de ángulo (teodolitos), GPS interior, luz estructurada (procedimientos de sección de luz, proyección de franjas, medición de fase, topografía), métodos de enfoque, métodos de sombra, etc.

Interferometría

Medición de tiempo de vuelo ópticamente coherente, holografía, interferometría de radar.

Medición del tiempo de vuelo

Medición de distancia por métodos de modulación óptica, modulación de pulsos, etc.

La fotogrametría se puede clasificar en una multiplicidad de formas:

Por posición de la cámara y distancia del objeto	
- Fotogrametría satelital:	procesamiento de imágenes satelitales, $h > 200\text{km}$ aprox.

– Fotogrametría aérea:	procesamiento de fotografías aéreas, $h > 300\text{m}$ aprox.
– Fotogrametría terrestre:	mediciones desde una ubicación terrestre fija
– Fotogrametría de corto alcance:	distancia de imagen $h < 300\text{ m}$ aprox.
– Macro fotogrametría:	escala de imagen > 1 (imágenes de microscopio)
Por número de imágenes de medición	
– Fotogrametría de imagen única:	procesamiento de imágenes individuales, monotrazamiento, rectificación, ortofotografías
– Estereofotogrametría:	procesamiento dual de imágenes, medición estereoscópica
– Fotogrametría multi imagen:	n imágenes donde $n > 2$, triangulación de paquetes

Por método de registro y procesamiento	
– Fotogrametría de tabla plana:	evaluación gráfica (hasta 1930)
– Fotogrametría analógica:	cámaras analógicas, sistemas de medición opticomecánicos (hasta 1980)
– Fotogrametría analítica:	imágenes analógicas, medición controladas por computador
– Fotogrametría digital:	imágenes digitales, medición controlada por computador
– Videogrametría:	adquisición y medición de imágenes digitales
– Fotogrametría panorámica:	imágenes panorámicas y procesamiento
– Fotogrametría de línea:	métodos analíticos basados en líneas rectas y polígonos
Por disponibilidad de resultados de medición	
• – Fotogrametría en tiempo real:	registro y medición completados dentro de un período de tiempo específico para la aplicación
– Fotogrametría fuera de línea:	secuencial, grabación digital de imágenes, separado en tiempo o ubicación de la medición
– Fotogrametría en línea:	grabación de imágenes digital simultánea, múltiple, medición inmediata
• Por aplicación o área especializada	
– Fotogrametría arquitectónica:	arquitectura, conservación del patrimonio, arqueología

– Fotogrametría de ingeniería:	aplicaciones generales de ingeniería (cartografía)
– Fotogrametría industrial:	aplicaciones industriales (de fabricación)
– Fotogrametría forense:	aplicaciones a diversos problemas legales
– Bioestereometría:	aplicaciones médicas
– Motografía:	grabación de pistas de destino en movimiento
– Fotogrametría multimedia:	grabación por medios de diferentes índices de refracción
– Forma de estéreo:	procesamiento de imágenes estéreo (visión por computadora)

Tabla 1 Clasificación de fotogrametría

2.1.1. Modelo de formación de imágenes

La fotogrametría es una técnica de medición tridimensional que utiliza la imagen de proyección central como modelo matemático fundamental (Fig. 6). De acuerdo con Liu, Jia, Wu, & Zhang (2020), *la forma y la posición de un objeto son determinada mediante la reconstrucción de haces de rayos en los que, para cada cámara, cada punto de imagen P' , junto con el correspondiente centro de perspectiva O' , define la dirección espacial del rayo al correspondiente punto objeto P . Siempre que se conozca la geometría de imagen dentro de la cámara y la ubicación del sistema de imágenes en el espacio de objetos, entonces cada rayo de imagen se puede definir en el espacio de objetos 3D.*

A partir de la intersección de al menos dos rayos de imagen correspondientes (homólogos), separados espacialmente, un punto de objeto se puede ubicar en tres dimensiones. En la estereofotogrametría se utilizan dos imágenes para lograr esto. En fotogrametría multiimagen el número de imágenes implicadas es, en principio, ilimitado.

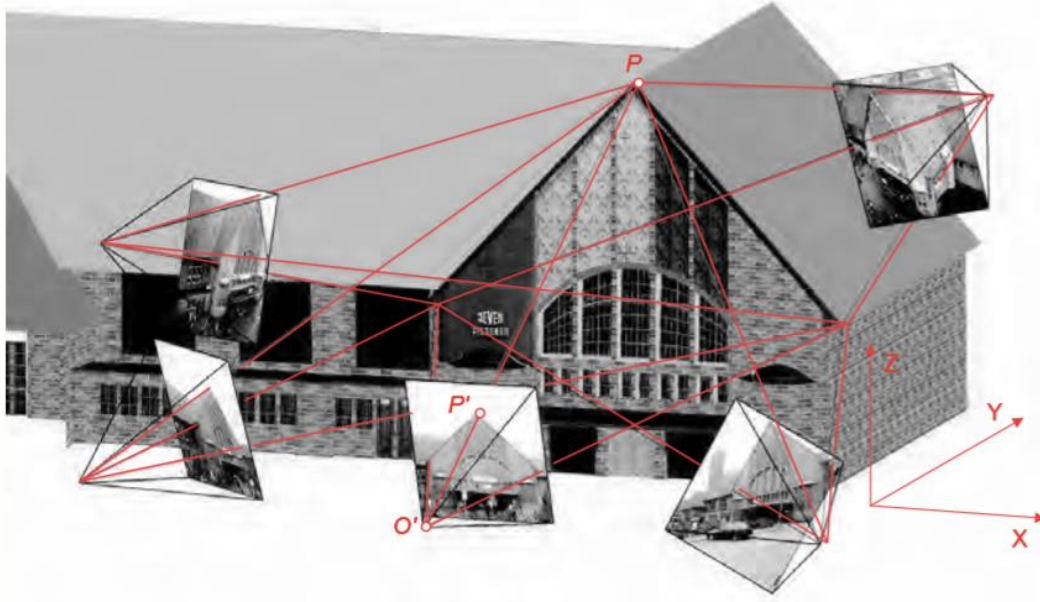


Figura 6 Principio de medición fotogramétrica

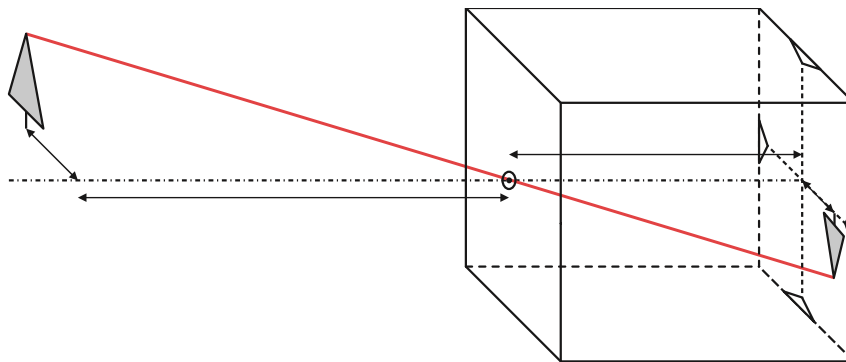


Figura 7 Modelo de cámara estenopeica

Los parámetros de orientación interior¹ describen el modelo geométrico interno de una cámara. Con el modelo de la cámara estenopeica (cámara simple sin lente pero con una pequeña apertura) como se muestra en la (Fig. 7), la ubicación de referencia más importante es el centro de perspectiva O , a través del cual pasan todos los rayos de la imagen. La orientación interior define la posición del centro de perspectiva en relación con un sistema de referencia fijado en la cámara (sistema de coordenadas de imagen), así como las desviaciones de la proyección central ideal (distorsión de imagen). El parámetro más importante de la orientación interior es la distancia principal, c , que define la distancia entre el plano de la imagen y el centro de la perspectiva.

Una cámara fotogramétrica real y práctica diferirá del modelo de cámara estenopeica. La necesidad de utilizar una lente de objetivo relativamente compleja, una carcasa de cámara que no está construida para la estabilidad y una superficie de grabación de imágenes que puede no ser ni plana ni perpendicular al eje óptico de la lente da lugar a desviaciones de la geometría de imagen ideal. La orientación interior, que incluirá parámetros que definen estas salidas, debe determinarse mediante calibración para cada cámara.

Según Wang & Lin (2022), *una propiedad fundamental de una imagen fotogramétrica es la escala de imagen o escala de fotos*. El factor de foto escala m , define la relación entre la distancia del objeto h y la distancia principal c (Ec 1.1). Alternativamente es la relación entre una distancia de objeto X en el objeto, en una dirección paralela al plano de la imagen, y la distancia correspondiente en el espacio de la imagen x' :

$$m = \frac{h}{c} = \frac{X}{x'} \quad (1.1)$$

Desde el punto de vista de Salvini, Vanneschi, Coggan, & Mastrorocco (2020), *la foto escala es en todos los casos el factor decisivo para resolver los detalles de la imagen*, así como la precisión de la medición fotogramétrica, ya que cualquier error de medición en la imagen se multiplica en el espacio del objeto por el factor de escala. Por supuesto, cuando se trata de objetos complejos, la escala variará a lo largo de la imagen; por lo general, se cita un valor nominal o promedio.

Según Liu, Lv, Zhang, Zhao, Fang, Gao, & Su (2022), *los parámetros de orientación exterior especifican la posición espacial y la orientación de la cámara en un sistema de coordenadas global*. La orientación exterior se describe mediante las coordenadas del centro de perspectiva en el sistema global y tres ángulos adecuadamente definidos que expresan la rotación del sistema de coordenadas de la imagen con respecto al sistema global. Según Ye, Liang, Li, Zong, Guo, Tang, Chen (2022), *los parámetros de orientación exterior se calculan indirectamente, después de medir las coordenadas*

¹ Esta referido a los parámetros de la cámara en el momento de la toma de la imagen. Los parámetros de orientación interior, que incluyen una distancia, dos coordenadas y una serie de coeficientes polinómicos, no implican valores angulares.

de imagen de puntos de objeto bien identificados con coordenadas globales fijas y conocidas.

Cada punto de imagen medido corresponde a una dirección espacial desde el centro de proyección hasta el punto del objeto. La longitud del vector de dirección es inicialmente desconocida, es decir, cada punto de objeto que se encuentra en la línea de este vector genera el mismo punto de imagen. En otras palabras, aunque cada punto de objeto tridimensional se transforma en un punto de imagen único para los parámetros de orientación dados, no es posible una inversión única de la proyección. El punto del objeto puede ubicarse en el rayo de la imagen y, por lo tanto, determinarse absolutamente en el espacio del objeto, solo interceptando el rayo con un elemento geométrico conocido adicional, como una segunda dirección espacial o un plano de objeto.

Cada imagen genera un haz espacial de rayos, definido por los puntos fotografiados y el centro de perspectiva, en el que todos los rayos se registraron en el mismo punto. Si todos los haces de rayos de múltiples imágenes se cruzan como se describió anteriormente, se crea una red densa; para una configuración de imagen adecuada, dicha red tiene el potencial de una alta resistencia geométrica. Utilizando el método de triangulación de fibras, cualquier número de imágenes (haces de rayos) puede orientarse simultáneamente, junto con el cálculo de las ubicaciones de los puntos de objeto tridimensionales asociados (Fig. 6).

2.2. Fundamentación matemática

A continuación, se presenta los fundamentos matemáticos que son esenciales para una comprensión más profunda de la fotogrametría y por ende la aplicación en procesos de estereofotogrametría, generando un soporte teórico para el establecimiento del marco didáctico del trabajo. Según Yookwan, Chinnasarn, So-In, & Horkaew, (2022), *después de definir algunos sistemas de coordenadas comunes, se resumen las transformaciones de coordenadas planas y espaciales más importantes*. La teoría básica del ajuste de mínimos cuadrados y se concluye con una introducción a las coordenadas homogéneas y proyecciones gráficas.

2.2.1. Sistemas de Coordenadas

2.2.1.1. Sistemas de coordenadas de imagen y cámara

El sistema de coordenadas de imagen define un sistema de referencia bidimensional basado en imágenes de coordenadas cartesianas rectangulares, $x'y'$. Su relación física con la cámara está definida por puntos de referencia, conocidas como marcas fiduciales, que se proyectan sobre la imagen adquirida. Para Sarker, Hadigheh, & Dias-da-Costa (2020), *un sistema de imágenes digitales, la matriz del sensor define el sistema de coordenadas de imagen*. Por lo general, el origen de la imagen o las

coordenadas del marco se encuentran en el centro de la imagen.

La relación entre la imagen plana y la cámara, considerada como un objeto espacial, se puede establecer cuando el sistema de coordenadas de la imagen se extiende por el eje z' normal al plano de la imagen. Este eje coincide aproximadamente con el eje óptico. El origen de esta, el sistema de coordenadas cámara 3D se encuentra en el centro de perspectiva O' . La posición de la imagen B1 corresponde a una ubicación en la imagen adquirida físicamente, que es el negativo de la imagen. Para una serie de cálculos matemáticos es más fácil utilizar la posición de imagen B2 correspondiente, en la imagen positiva equivalente (ver Fig. 8). Aquí el vector de coordenadas de imagen x' apunta en la misma dirección que el vector al punto objeto P. En este caso, la distancia principal debe definirse como un valor negativo que conduce al vector de imagen x' :

$$x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ -c \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Así, el vector de imagen x' describe el rayo de proyección, con respecto al sistema de coordenadas de la imagen, desde el punto de la imagen hasta el punto del objeto. La posición espacial del centro de perspectiva en el sistema de coordenadas de la imagen viene dada por los parámetros de *orientación interior*.

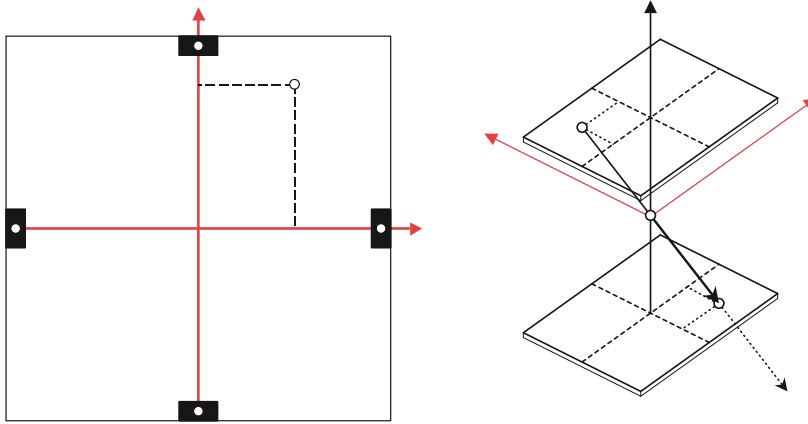


Figura 8 Sistema de coordenadas de imagen y cámara

2.2.1.2. Sistema de coordenadas del comparador

El sistema de coordenadas del comparador, x^*y^* , define el sistema de coordenadas de un dispositivo de medición de imágenes que ofrece mediciones de longitud en coordenadas de máquina. La transformación de x^*y^* en coordenadas de imagen $x'y'$ se realiza generalmente mediante una transformación afín utilizando marcas fiduciales como puntos comunes. (fig. 9)

2.2.1.3. Sistema de coordenadas del modelo

El sistema de coordenadas del modelo cartesiano espacial xyz se utiliza para describir la posición relativa y la orientación de dos o más imágenes (sistemas de coordenadas de imagen). Normalmente su origen está en el centro de la perspectiva de una de las imágenes. Además, el sistema de coordenadas del modelo puede ser paralelo al sistema de coordenadas de imagen relacionado. (Fig. 10)

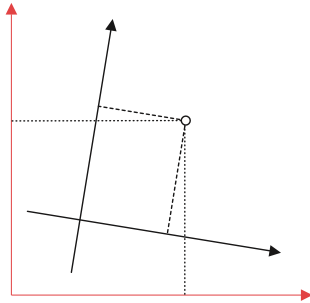


Figura 9 Sistema de coordenadas del comparador

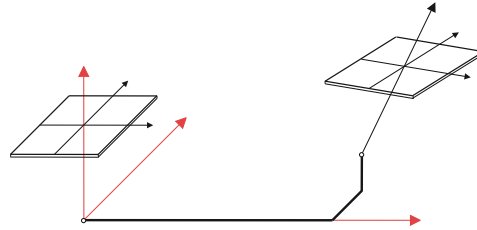


Figura 10 Sistema de coordenadas del modelo

2.2.1.4. Sistema de coordenadas de objetos

El término sistema de coordenadas de objetos (fig 11), también conocido como el sistema de coordenadas del mundo, se usa aquí para cada sistema de coordenadas cartesianas espaciales XYZ que se define por puntos de referencia en el objeto. Por ejemplo, los sistemas nacionales de coordenadas geodésicas¹ (X = este, Y = norte, Z = altitud, origen en el ecuador) están definidos por puntos de referencia medidos geodésicamente. Otro ejemplo es el sistema de coordenadas de objeto local o pieza de trabajo de una carrocería de automóvil que se define por los ejes de construcción (X = eje longitudinal del automóvil, Y = eje delantero, Z = altura, origen en el centro del eje delantero).

¹ Los sistemas nacionales de coordenadas geodésicas que utilizan el geoide como superficie de referencia, son equivalentes a un sistema de coordenadas cartesianas sólo en áreas pequeñas.

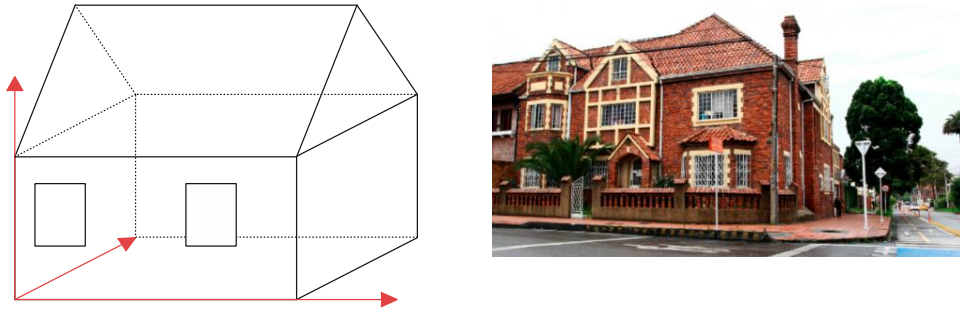


Figura 11 Sistemas de coordenadas de objetos

2.2.1.5. Sistema de coordenadas de instrumentos 3D

Un caso especial de sistema de coordenadas tridimensionales es uno orientado arbitrariamente utilizado por una máquina de medición 3D. Esto no está directamente relacionado con ningún sistema superior u objeto en particular, pero si, por ejemplo, se da una sola escala de referencia (Fig. 12), entonces todavía es posible medir las coordenadas espaciales del objeto. La definición de origen, ejes y escala de un sistema de coordenadas también se conoce como dato (geodésico).

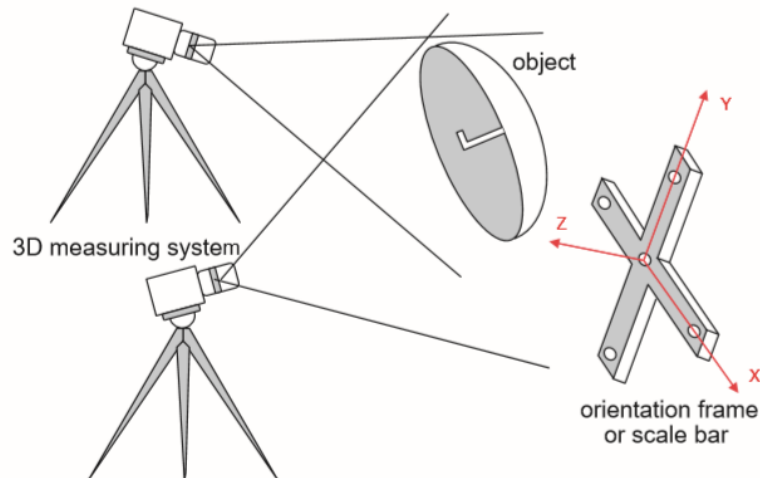


Figura 12 Sistema de coordenadas de instrumentos 3D

2.2.2. Transformación de coordenadas

2.2.2.1. Transformaciones de plano

2.2.2.1.1. Transformación de similitud

La transformación de similitud de plano se utiliza para el mapeo de dos sistemas de coordenadas cartesianas planas. Generalmente se emplea una transformación de 4 parámetros que define dos traslaciones, una rotación y un factor de escala entre los dos sistemas. Se mantienen los ángulos y las proporciones de distancia.

Dado un punto P en el sistema de origen xy , las coordenadas XY en el sistema de destino son:

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1x - b_1y \\ Y &= b_0 + b_1x - a_1y \end{aligned} \tag{2.2}$$

o

$$\begin{aligned} X &= a_0 + m(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \\ Y &= b_0 + m(x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aquí a_0 y b_0 definen la traslación del origen, α es el ángulo de rotación y m es el factor de escala global. Para determinar los cuatro coeficientes, se requiere un mínimo de dos puntos idénticos en ambos sistemas. Con más de dos puntos idénticos, los parámetros de transformación se pueden calcular mediante un ajuste de mínimos cuadrados sobre determinado.

En la notación matricial (2.2) se expresa como:

$$X = Ax + a$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$X = mR_x + X_0$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

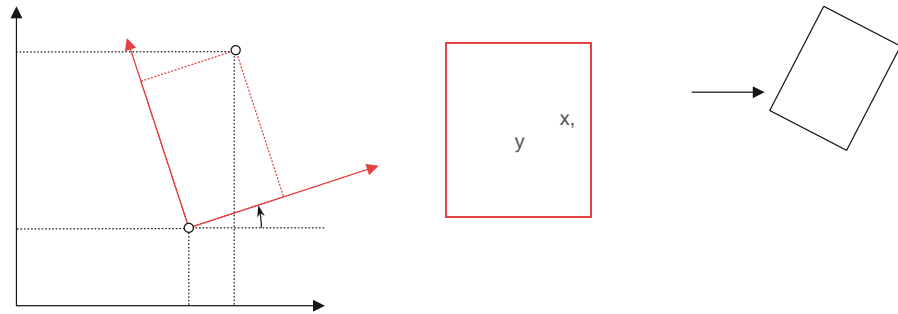


Figura 13 Transformación de similitud de plano

R es la matriz de rotación correspondiente al ángulo de rotación α esta es una matriz ortogonal que tiene vectores de columna (o fila) ortonormales y tiene las propiedades:

$$R^{-1} = R^T \quad \text{y} \quad R^T R = I$$

Para la transformación inversa de coordenadas del sistema de destino en el sistema de origen, las ecuaciones de transformación (2.4) se reorganizan de la siguiente manera:

$$x = \frac{1}{m} R^{-1}(X - X_0) \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix}$$

2.2.2.2. Transformación afín

La transformación afín plana también se utiliza para el mapeo de dos sistemas de coordenadas planas. Esta transformación de 6 parámetros define dos desplazamientos, una rotación, un ángulo de corte entre los ejes y dos factores de escala separados.

Para un punto P en el sistema de origen, las coordenadas XY en el sistema de destino vienen dadas por:

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1x + a_2y \\ Y &= b_0 + b_1x + b_2y \end{aligned} \quad (2.6)$$

O no lineal con $a_0 = X_0$ and $b_0 = Y_0$

$$X = X_0 + m_x x \cos \alpha - m_y y \sin(\alpha + \beta)$$

$$Y = Y_0 + m_x x \sin \alpha + m_y y \cos(\alpha + \beta) \quad (2.7)$$

Los parámetros a_0 y b_0 (X_0 e Y_0) definen el desplazamiento del origen, α es el ángulo de rotación, β es el ángulo de cizallamiento entre los ejes y m_x , m_y son los factores de escala para x e y . Para determinar los seis coeficientes se requiere un mínimo de tres puntos idénticos en ambos sistemas. Con más de tres puntos idénticos, los parámetros de transformación se pueden calcular mediante un ajuste de mínimos cuadrados sobre determinado.

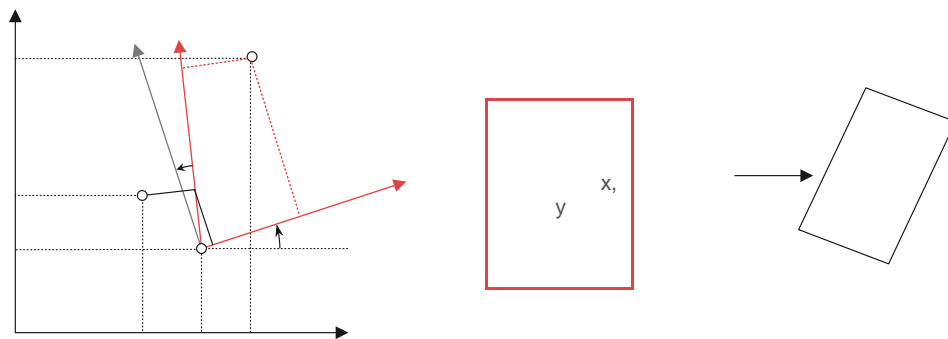


Figura 14 Transformación afín plana

En notación matricial la transformación afín se puede escribir como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Ax} + \mathbf{a}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

O

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_X \cos \alpha & -m_Y \sin(\alpha + \beta) \\ m_X \sin \alpha & m_Y \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

A es la matriz de transformación afín. Para sistemas ligeramente rotados y cortados, el parámetro a_1 corresponde al factor de escala m_X y parámetro b_2 al factor de escala m_Y .

2.2.2.3. Transformación polinómica

Las deformaciones no lineales pueden ser descritas por polinomios de grado n . En general, el modelo de transformación se puede escribir como:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{ji} x^j y^i \\ Y &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n b_{ji} x^j y^i \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde n = grado de polinomio.

Un polinomio de $n=2$ viene dado por:

$$X = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2$$

$$Y = b_{00} + b_{10}x + b_{11}y + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2$$

El polinomio de $n=1$ es idéntico a la transformación afín (2.6). En general, el número de coeficientes necesarios para definir una transformación polinómica de grado n es:

$$u = (n + 1)(n + 2)$$

Para determinar los coeficientes u , un mínimo de $u/2$ se requieren puntos idénticos en ambos sistemas.

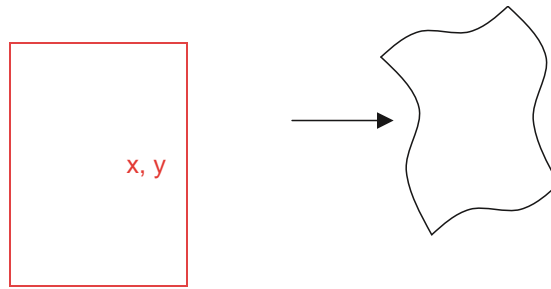


Figura 15 Transformación polinómica plana

2.2.2.4. Transformación bilineal

La transformación bilineal es similar a la transformación afín pero extendida por un término mixto:

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ Y &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para determinar los ocho coeficientes, se requiere un mínimo de cuatro puntos idénticos.

La transformación bilineal se puede utilizar en la transformación e interpolación sin restricciones de cuadriláteros (Fig. 15), por ejemplo, en cuadrículas de reseau o modelos de superficie digital.

Para la transformación de un cuadrángulo con longitud de línea Δ , los coeficientes pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 1/\Delta & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 0 & 1/\Delta & 0 \\ 1/\Delta^2 & -1/\Delta^2 & -1/\Delta^2 & 1/\Delta^2 \end{bmatrix}$

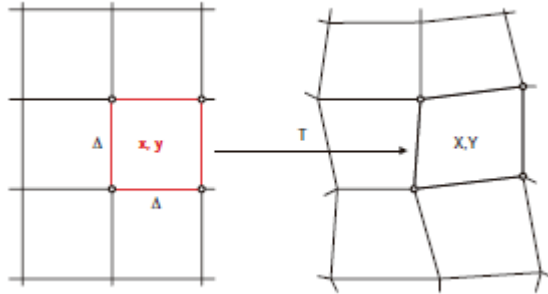


Figura 16 Transformación bilineal

2.2.2.5. Transformación proyectiva

La transformación proyectiva mapea dos sistemas de coordenadas planas utilizando una proyección central. Todos los rayos de proyección son líneas rectas a través del centro de la perspectiva. El modelo de transformación es:

$$X = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + c_1x + c_2y} \quad (2.12)$$

$$Y = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + c_1x + c_2y}$$

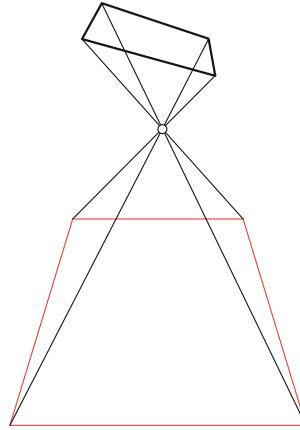


Figura 17 Transformación proyectiva de plano

El sistema de ecuaciones (2.12) no es lineal. Multiplicando por el denominador y reorganizando, se puede derivar la siguiente forma lineal. Esto es adecuado como ecuación de observación en un procedimiento de ajuste (ver Fig. 17).

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2y - X - c_1xX - c_2yX &= 0 \\ b_0 + b_1x + b_2y - Y - c_1xY - c_2yY &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para determinar los ocho coeficientes, se requieren cuatro puntos idénticos donde no puede haber tres en una línea recta común. Con más de cuatro puntos, el sistema de ecuaciones se puede resolver mediante ajuste (ver esquema de cálculo en la sección 4.4.1.1). Para la derivación de (2.12) se puede utilizar la transformación de similitud espacial.

La transformación proyectiva plana conserva las propiedades rectilíneas y los puntos de intersección de las líneas rectas. Por el contrario, los ángulos, la longitud y las proporciones de área no son invariantes.

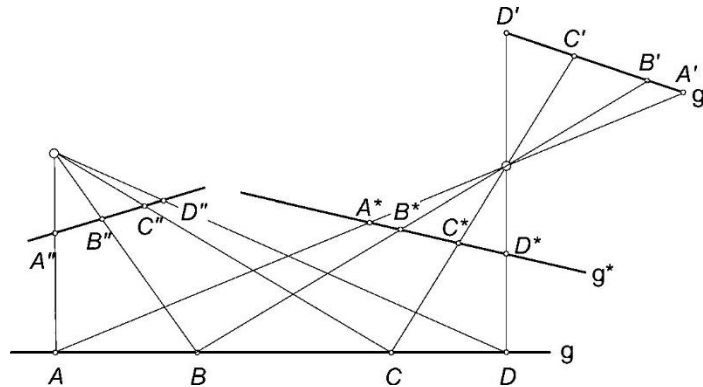


Figura 18 Proporciones cruzadas

Un adicional, la propiedad invariante de la proyección central son las relaciones cruzadas de distancias entre puntos en línea recta. Se definen de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{AD}{BD} \div \frac{AC}{BC} = \frac{A^*D^*}{B^*D^*} \div \frac{A^*C^*}{B^*C^*} = \frac{A'D'}{B'D'} \div \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A''D''}{B''D''} \div \frac{A''C''}{B''C''} \quad (2.14)$$

Las relaciones cruzadas se aplican a todas las líneas rectas que cruzan un haz de rayos de perspectiva en una posición arbitraria (Fig. 2.11).

La transformación proyectiva plana se aplica al análisis de imagen única, por ejemplo, para la rectificación o medición de coordenadas en imágenes individuales

2.4.4. Transformaciones espaciales

2.4.4.1. Rotaciones espaciales

2.4.4.1.1. Matriz de rotación mediante funciones trigonométricas

Para las transformaciones planas, las rotaciones surten efecto sobre un solo punto. Por el contrario, las rotaciones espaciales se realizan sucesivamente sobre los tres ejes de un sistema de coordenadas espaciales. Considere un punto P en el sistema de origen xyz que se gira con respecto al sistema de destino XYZ . Utilizando funciones trigonométricas, las rotaciones individuales sobre los tres ejes del sistema objetivo se definen de la siguiente manera:

- Rotación sobre el eje Z

Una rotación del eje Z se designa convencionalmente por el ángulo κ . Esto es positivo en sentido contrario a las agujas del reloj cuando se ve hacia abajo en el eje Z positivo hacia el origen. A partir de la ecuación (2.4), esto da como resultado las siguientes coordenadas puntuales en el sistema de destino XYZ :

$$\begin{aligned} X &= x \cos \kappa - y \sin \kappa & O \\ X &= R_{\kappa} x & (2.15) \end{aligned}$$

$$Y = x \sin \kappa + y \cos \kappa$$

$$Z = z \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Rotación sobre el eje Y

La rotación correspondiente sobre el eje Y se designa por ángulo de rotación ϕ . Esto da como resultado las siguientes coordenadas de punto de destino XYZ :

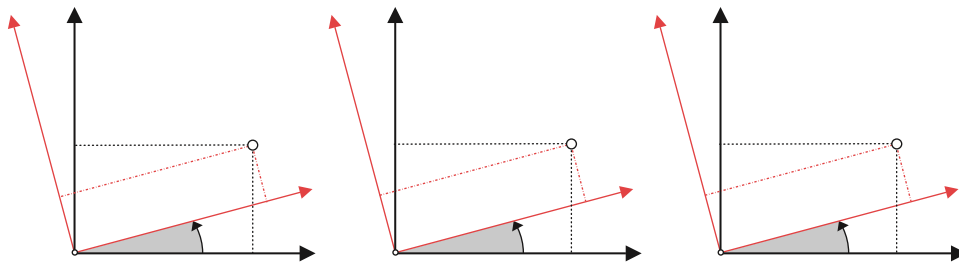


Figura 19 Definición de ángulos de rotación espacial

$$X = x \cos \varphi + z \sin \varphi \quad \text{O} \quad X = R_{\varphi} x \quad (2.16)$$

$$Y = y$$

$$Z = -x \sin \varphi + z \cos \varphi \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Rotación sobre el eje X

Finalmente, el eje de rotación X esta dado para que el ángulo ω tenga un resultado en los valores XYZ:

$$X = x \quad \text{O} \quad X = R_{\omega} x \quad (2.17)$$

$$Y = y \cos \omega - z \sin \omega$$

$$Z = -y \sin \omega + z \cos \omega \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La rotación completa **R** de una transformación de coordenadas espaciales se puede definir mediante la aplicación sucesiva de 3 rotaciones individuales, como se definió anteriormente. Solo son posibles ciertas combinaciones de estas 3 rotaciones y estas se pueden aplicar sobre las direcciones axiales fijas del sistema de destino o los ejes móviles del sistema de origen. Si se define una rotación general sobre ejes móviles en el orden $\omega \varphi \kappa$, entonces la rotación completa viene dada por:

$$X = R_x \quad (2.18)$$

Donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\omega} \mathbf{R}_{\varphi} \mathbf{R}_{\kappa} \quad (2.19)$$

y

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa & \sin \varphi \\ \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & -\sin \omega \cos \varphi \\ \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Si la rotación se define alternativamente sobre ejes fijos en el orden $\omega \varphi \kappa$, entonces la matriz de rotación viene dada por:

$$R^* = R_{\kappa} R_{\varphi} R_{\omega} \quad (2.20)$$

Esto es matemáticamente equivalente a aplicar las mismas rotaciones sobre ejes móviles, pero en orden inverso.

Las matrices de rotación son ortogonales con la propiedad de que la matriz inversa es igual a la transposición:

$$R^{-1} = R^T \quad \text{Y} \quad RR^T = I$$

A partir de la ecuación (2.17) la transformación inversa que genera las coordenadas de un punto P en el sistema rotado xyz a partir de sus valores XYZ viene dada por:

$$x = R^T X \quad (2.21)$$

Donde

$$R^T = R_{\kappa}^T R_{\varphi}^T R_{\omega}^T \quad (2.22)$$

Nótese que, en esta transformación inversa, las matrices de rotación invertidas individualmente se multiplican en el orden inverso.

A partir de los coeficientes matriciales $r_{11} \dots r_{33}$ en la ecuación (2.19), los ángulos de rotación individuales se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= r_{13} \\ \tan \omega &= -\frac{r_{23}}{r_{33}} \\ \tan \kappa &= -\frac{r_{12}}{r_{11}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) muestra que la determinante de ϕ es ambigua para las 2 soluciones del $\sin \phi$ en los 2 cuadrantes. Adicionalmente, no hay una única solución para la rotación de ángulos, si la segunda rotación (ϕ en este caso) es igual a 90° o 270° . ($\cos \phi$ in r_{11} and r_{33} entonces causa división por cero).

Una solución simple a este problema de ambigüedad es alterar el orden de rotación. En el caso de que la rotación secundaria esté cerca de 90° , las rotaciones primaria y secundaria se pueden intercambiar, lo que lleva al nuevo orden $\varphi \omega \kappa$. Este procedimiento se utiliza en fotogrametría de corto alcance cuando la dirección de visión de la cámara es aproximadamente horizontal (ver Fig. 20). La matriz de rotación resultante viene dada por:

$$R_{\varphi\omega\kappa} = R_\varphi R_\omega R_\kappa \quad (2.24)$$

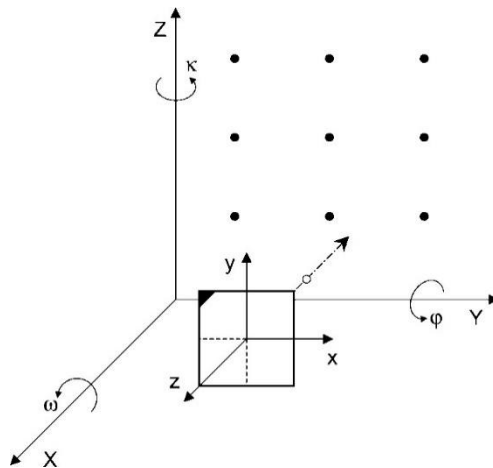


Figura 20 Configuración de imagen donde $\omega = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ y $\kappa = 90^\circ$

Donde

$$R_{\varphi\omega\kappa} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{33} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \kappa + \sin \varphi \sin \omega \sin \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa + \sin \varphi \sin \omega \sin \kappa & \sin \varphi \cos \varphi \\ \cos \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa & -\sin \omega \\ -\sin \varphi \cos \kappa + \cos \varphi \sin \omega \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa + \cos \varphi \sin \omega \cos \kappa & \cos \varphi \cos \omega \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1:

Refiriéndose a la Fig. 20 se muestra una configuración de imagen donde la rotación primaria $\omega = 0^\circ$, la rotación secundaria $\varphi = 90^\circ$ y la rotación terciaria $\kappa = 90^\circ$. En este caso la matriz de rotación $R_{\omega \varphi \kappa}$ se reduce a

$$R_{\varphi\omega\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de rotación representa un intercambio de ejes de coordenadas. La primera fila describe la transformación del eje X. Sus elementos x, y y z son respectivamente 0, 0 y 1, lo que indica una transformación de X a z. En consecuencia, la segunda fila muestra Y transformándose en x y la tercera fila transformando Z en y.

El intercambio de órdenes de rotación no es una solución adecuada para imágenes orientadas arbitrariamente. En primer lugar, los ángulos de rotación de las imágenes ubicadas libremente en el espacio 3D no son fáciles de visualizar. En segundo lugar, no se pueden evitar las ambigüedades, lo que conduce a singularidades al calcular las orientaciones.

2.4.4.1.2. Matriz de rotación mediante funciones algebraicas

Las ambigüedades para las funciones trigonométricas (arriba) se pueden evitar cuando se utiliza una matriz de rotación con funciones algebraicas. Las tres rotaciones independientes se describen mediante cuatro parámetros algebraicos

$$R^T = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Implícitamente esta matriz de rotación contiene un factor de escala común.

$$m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (2.26)$$

Usando la restricción $m = 1$, se obtiene una matriz de rotación ortogonal con tres parámetros independientes.

La interpretación geométrica de esta matriz de rotación no es fácil. Sin embargo, utilizando la matriz de rotación de la ecuación (2.19), la transformación de los cuatro coeficientes en ángulos de rotación estándar se puede realizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin \kappa &= 2(dc - ab) \\ \cos \varphi \sin \kappa &= d^2 + a^2 - b^2 - c^2 \\ \cos \varphi \sin \omega &= 2(da - bc) \\ \cos \varphi \cos \omega &= d^2 - a^2 + b^2 - c^2 \\ \sin \varphi &= 2(ac + bd) \end{aligned} \quad (2.27)$$

En resumen, una matriz de rotación con funciones algebraicas ofrece los siguientes beneficios:

- no uso de funciones trigonométricas
- cálculo simplificado de la matriz de diseño y convergencia más rápida en los sistemas de ajuste
- sin singularidades
- cálculo más rápido al evitar series de potencia para cálculos trigonométricos internos.

2.4.4.1.3. Matriz de rotación con cosenos de dirección

La matriz de rotación espacial puede considerarse como una matriz de cosenos de dirección de los ángulos entre los ejes de coordenadas originales y giratorios. Los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} se definen en la dirección de los ejes girados (Fig. 21).

$$R = \begin{bmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{bmatrix} = [i \quad j \quad k] \quad (2.28)$$

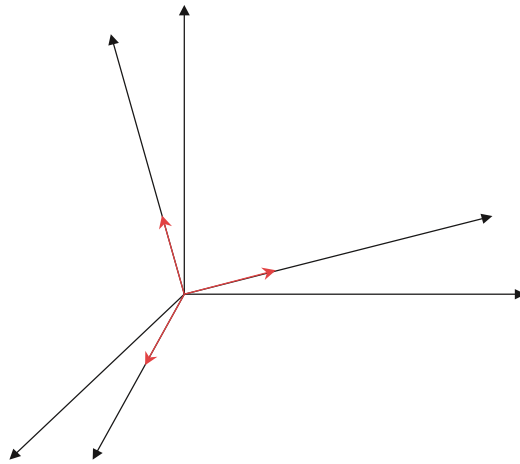


Figura 21 Cosenos de dirección

2.4.4.1.4. Matriz de rotación diferencial para pequeñas rotaciones

Para rotaciones diferenciales, la matriz de rotación se reduce a

$$dR = \begin{bmatrix} 1 & -dk & d\varphi \\ dk & 1 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

2.4.4.2. Comparación de coeficientes

La rotación espacial definida en

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{x}$$

depende de los nueve coeficientes $r_{11} \dots r_{33}$ de \mathbf{R} . Véase, por ejemplo, el orden de rotación $\omega \varphi \kappa$ sobre ejes rotados que define \mathbf{R} en la ecuación (2.20). Si el resultado de transformación idéntico debe lograrse mediante una matriz de rotación \mathbf{R}' utilizando un orden de rotación diferente, los coeficientes de \mathbf{R}' deben ser iguales a los de \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}'$$

Si los ángulos de rotación $\omega' \varphi' \kappa'$ de la matriz de rotación \mathbf{R}' deben calcularse a partir de los ángulos explícitamente dados $\omega \varphi \kappa$ de \mathbf{R} , esto se puede lograr mediante una comparación de los coeficientes de la matriz y un posterior cálculo inverso de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 2:

Dada la matriz de rotación de (2.19) definida por los ángulos $\omega = 35$ gon, $\phi = 60$ gon, $\kappa = 30$ gon, determine los ángulos de rotación ω' ϕ' κ' pertenecientes a la matriz de rotación equivalente R' definida por (2.24):

Evaluar los coeficientes $r'_{11} \dots r'_{33}$ de R' multiplicando las matrices de rotación individuales en el orden $R' = R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa}$, sustituyendo los valores dados de ω ϕ κ :

$$R' = \begin{bmatrix} 0.523720 & -0.266849 & 0.809017 \\ 0.763728 & 0.567802 & -0.307117 \\ -0.377407 & 0.778712 & 0.501169 \end{bmatrix}$$

Escriba los coeficientes $r'_{11} \dots r'_{33}$ de R' en forma trigonométrica multiplicando las matrices de rotación individuales en el orden $R' = R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa}$. Asigne a cada coeficiente los valores de R , es decir, $r'_{11} = r_{11}$, $r'_{12} = r_{12}$, y así sucesivamente.

Calcular los ángulos de rotación ω' ϕ' κ' de R' resolviendo las ecuaciones trigonométricas:

$$\omega' = 19.873 \text{ gon} \quad \phi' = 64.692 \text{ gon} \quad \kappa' = 59.301 \text{ gon}$$

2.2.3. Transformación de similitud espacial

Modelo matemático

La transformación de similitud espacial se utiliza para el mapeo invariante de forma de un sistema de coordenadas cartesianas tridimensionales xyz en un sistema objetivo correspondiente XYZ. Ambos sistemas pueden rotarse, desplazarse y escalarse arbitrariamente entre sí. Es importante tener en cuenta que se conserva la rectangularidad de los ejes de coordenadas. Por lo tanto, esta transformación es un caso especial de la transformación afín general que requiere 3 factores de escala y 3 parámetros de cizallamiento adicionales para cada eje de coordenadas, un total de 12 parámetros.

La transformación de similitud espacial, también conocida como transformación de Helmert 3D, está definida por 7 parámetros: 3 traducciones al origen del sistema xyz (vector \mathbf{X}_0 definido por X_0, Y_0, Z_0), 3 ángulos de rotación ω, ϕ, κ sobre los ejes XYZ (implícito en la matriz de rotación ortogonal \mathbf{R}) y un factor de escala m . Los 6 parámetros para traslación y rotación corresponden a los parámetros de orientación exterior. La función de transformación para un punto $P(xyz)$, definida por el vector \mathbf{x} , viene dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + m\mathbf{R}\mathbf{x} \quad (2.30)$$

O

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

para determinar los siete parámetros, se requiere un mínimo de siete observaciones. Estas observaciones pueden derivarse de los componentes de coordenadas de al menos tres puntos de referencia distribuidos espacialmente (puntos de control). Deben contener al menos 2 componentes X, 2 Y y 3 Z y no deben estar en una línea recta común en el espacio del objeto.¹

La transformación de la similitud espacial es de fundamental importancia para la fotogrametría por dos razones. En primer lugar, es funcionalmente equivalente a la proyección central en el espacio 3D, que se utiliza para derivar las ecuaciones de colinealidad. Estas son las ecuaciones fundamentales de la fotogrametría analítica. En

¹ Se supone que la dirección de visualización es aproximadamente paralela al eje Z. Para otras orientaciones de imagen, se requieren puntos de control colocados adecuadamente.

segundo lugar, se utiliza para la transformación de coordenadas 3D locales (por ejemplo, coordenadas del modelo, coordenadas de la máquina de medición 3D) en un sistema superior arbitrario (por ejemplo, sistema de coordenadas de objeto o mundo), por ejemplo, en el caso de la orientación absoluta, o el ajuste del haz.

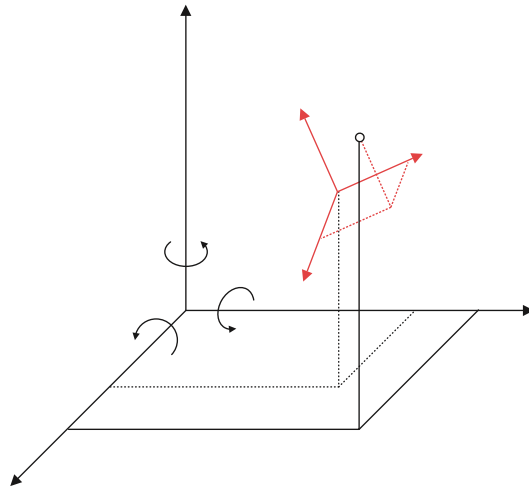


Figura 22 Transformación de similitud espacial

Existen soluciones simplificadas para una transformación entre dos sistemas que son aproximadamente paralelos (por ejemplo, Kraus 1997, Albertz y Kreiling 1989). En el caso general, tanto el sistema de origen como el de destino tienen una orientación relativa arbitraria, es decir, puede producirse cualquier posible traslación y rotación. El cálculo de los parámetros de transformación requiere entonces la linealización del sistema de ecuaciones definidas por la transformación de similitud (2.30). También se requieren valores iniciales suficientes para determinar los parámetros desconocidos.

El sistema de ecuaciones normalmente está sobredeterminado y la solución se realiza mediante ajuste de mínimos cuadrados (ver sección 2.3). Esto deriva un ajuste óptimo entre ambos sistemas de coordenadas. Según la ecuación (2.30) cada punto de referencia definido en ambos sistemas genera hasta tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 X &= X_0 + m(r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z) \\
 Y &= Y_0 + m(r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z) \\
 Z &= Z_0 + m(r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z)
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Al linealizar las ecuaciones a valores aproximados de parámetros, se construyen las ecuaciones de corrección correspondientes. Cualquier punto de referencia con coordenadas X, Y y Z definidas (punto de referencia completo) proporciona tres ecuaciones de observación. En consecuencia, los puntos de referencia con menos componentes de coordenadas generan menos ecuaciones de observación, pero aún se pueden usar para la estimación de parámetros. Por lo tanto, una transformación que involucra 3 puntos de referencia completos ya proporciona 2 observaciones redundantes. El método utilizado en metrología industrial, se basa en 6 observaciones, no deriva un cambio de escala y, por lo tanto, da como resultado redundancia cero.

Valores aproximados

Para calcular los valores aproximados de los parámetros de traslación y rotación de la transformación de similitud, se forma un sistema de coordenadas intermedio. Esto se deriva de 3 puntos de referencia XYZ P1, P2, P3 según lo indicado por el sistema uvw (Fig. 23). El propósito de este consiste en calcular los parámetros que transforman los puntos de referencia del sistema intermedio uvw a los sistemas de coordenadas XYZ y xyz.

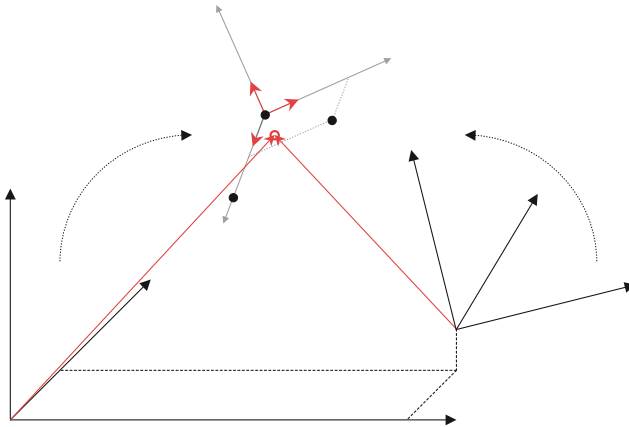


Figura 23 Cálculo de valores aproximados para la transformación de similitud 3D

$$\begin{aligned}
 P_{XYZ} &= R_{u \rightarrow X} P_{uvw} + T_{u \rightarrow X} \\
 P_{xyz} &= R_{u \rightarrow x} P_{uvw} + T_{u \rightarrow x}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Resolviendo ambas ecuaciones para Puvw y reorganizando:

$$R_{u \rightarrow X}^T (P_{XYZ} - T_{u \rightarrow X}) = R_{u \rightarrow x}^T (P_{xyz} - T_{u \rightarrow x})$$

y finalmente para las coordenadas de un punto en el sistema XYZ:

$$\begin{aligned}
 P_{XYZ} &= R_{u \rightarrow X} R_{u \rightarrow x}^T P_{xyz} + T_{u \rightarrow X} - R_{u \rightarrow X} R_{u \rightarrow x}^T T_{u \rightarrow x} \\
 &= R_{x \rightarrow X}^0 P_{xyz} + (T_{u \rightarrow X} - R_{x \rightarrow X}^0 T_{u \rightarrow x}) \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Aquí las matrices $R_{u \rightarrow X}$ y $R_{u \rightarrow x}$ describen la rotación de cada sistema bajo análisis con respecto al sistema intermedio. Los vectores T describen las traducciones correspondientes. La expresión entre paréntesis describe la traducción entre los sistemas XYZ y xyz:

$$X_{x \rightarrow X}^0 = T_{u \rightarrow X} - R_{x \rightarrow X}^0 T_{u \rightarrow x} \quad (2.34)$$

Para calcular los parámetros requeridos, el eje u del sistema intermedio se construye a través de P_1 y P_2 y el plano uv a través de P_3 . A partir de los vectores locales definidos por los puntos de referencia $P_i (X_i, y_i, Z_i)$, $i = 1...3$, los vectores de dirección normalizados se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|} & u &= \frac{p_2 - p_1}{|p_2 - p_1|} \\
 W &= \frac{U \times (P_3 - P_1)}{|U \times (P_3 - P_1)|} & w &= \frac{u \times (p_3 - p_1)}{|u \times (p_3 - p_1)|} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

$$V = W \times U \quad v = w \times u$$

El **vector u** es un vector unitario en el eje u, **w** es perpendicular al plano uv y **v** es perpendicular a **u** y **w**. Estos 3 vectores definen directamente la matriz de rotación de uvw a XYZ (ver eq. 2.28):

$$\begin{aligned} R_{u \rightarrow X} &= [U \quad V \quad W] \\ R_{u \rightarrow x} &= [u \quad v \quad w] \end{aligned} \quad (2.36)$$

De la misma manera la matriz de rotación Rxyz se define por las coordenadas del punto de referencia en el sistema xyz. La matriz de rotación aproximada del xyz al sistema XYZ se obtiene de la aplicación sucesiva de las dos matrices anteriores de la siguiente manera:

$$R_{u \rightarrow X}^0 = R_{u \rightarrow X} R_{u \rightarrow x}^T \quad (2.37)$$

Usando el centroide de los puntos de referencia en ambos sistemas de coordenadas, valores aproximados para los parámetros de traducción de la transformación de similitud se pueden calcular:

$$X_S = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} \quad : \text{centroide en el sistema XYZ}$$

$$x_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \quad : \text{centroide en el sistema xyz} \quad (2.38)$$

De acuerdo con la ecuación (2.34) la traducción se puede calcular:

$$X_{x \rightarrow X}^0 = X_S - R_{x \rightarrow X}^0 x_S \quad (2.39)$$

2.4.4.3. Transformaciones gráficas

Coordenadas homogéneas

Las transformaciones gráficas son transformaciones y proyecciones utilizadas en gráficos por computadora y geometría proyectiva. En este campo se utilizan a menudo coordenadas homogéneas para formar estas funciones.

$$X_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Estos incluyen el importante caso especial $w = 1$ para coordenadas cartesianas x, y, z :

$$X = \begin{bmatrix} x_h/w \\ y_h/w \\ z_h/w \\ w/w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Utilizando coordenadas homogéneas, todas las transformaciones y traslaciones de coordenadas, así como las proyecciones axonométricas y centrales, se pueden formular de manera unificada en cualquier combinación. Por lo tanto, se adaptan perfectamente a los cálculos en gráficos por computador y sistemas CAD.

2.4.4.4. Transformaciones generales

La transformación lineal general de coordenadas homogéneas viene dada por:

$$X = T x \tag{2.42}$$

donde **T** es la matriz de transformación o proyección

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 3,3 & 1,3 \\ T_{21} & T_{22} \\ 3,1 & 1,1 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Esta transformación siempre da como resultado un nuevo vector de coordenadas homogéneo. Los cuatro submatrices contienen información de la siguiente manera:

T_{11} : escalado, reflexión en una línea, rotación

T_{12} : translación

T_{21} : perspectiva

T_{22} : escalado homogéneo (factor w)

El escalado o reflexión sobre una línea se realiza por los factores sX , sY , sZ

Se produce una rotación espacial si T_{12} se sustituye por la matriz de rotación:

$$T_S = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rotación espacial} \quad (2.45)$$

La traslación por un vector xT , yT , zT se realiza mediante la matriz de proyección

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad : \text{Traslación} \quad (2.46)$$

Las transformaciones combinadas T_1 , T_2 , etc. se pueden crear mediante la multiplicación secuencial de matrices de proyección individuales de la siguiente manera:

$$X = T_X = T_n \dots T_2 T_1 X \quad (2.47)$$

En general, el orden de multiplicación no se puede cambiar porque las proyecciones no son necesariamente conmutativas.

La transformación inversa viene dada por:

$$x = T^{-1}x = T_1^{-1}T_2^{-1} \dots T_n^{-1}X \quad (2.48)$$

2.4.5. Proyecciones

Para la proyección de un objeto 3D en una imagen o plano de trazado, es común distinguir entre transformaciones axonométricas y de perspectiva.

Para las proyecciones axonométricas, el objeto se proyecta sobre el plano deseado mediante una proyección paralela. Un ejemplo es la proyección isométrica ampliamente utilizada en la tecnología CAD. La matriz de proyección para la proyección isométrica (Fig. 2.17) viene dada por:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -\cos(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 & 0 \\ -\sin(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{isometría} \quad (2.50)$$

donde la coordenada Z transformada se descarta en la visualización.

La proyección central se modela en primer lugar para el siguiente caso especial. El plano de proyección está orientado normalmente a la dirección de visión Z con la distancia c al centro de perspectiva. Refiriéndose a la Fig. 2.18, se pueden derivar las siguientes proporciones¹.

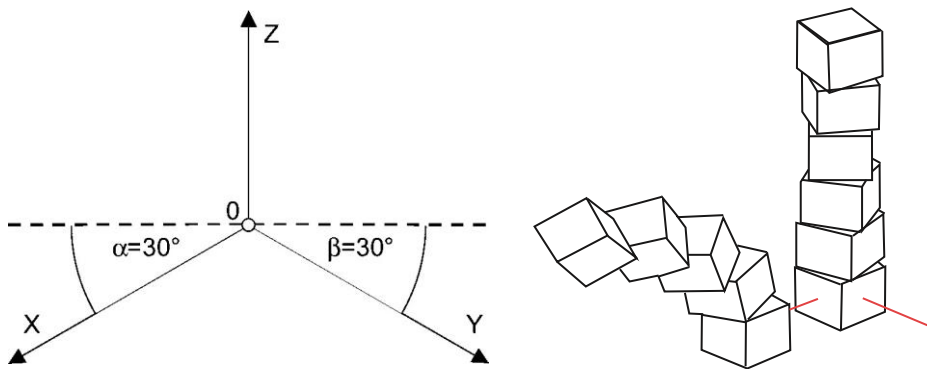


Figura 24 Proyección isométrica

¹Aquí se utilizan las notaciones habituales para las coordenadas de imagen x', y' y c.

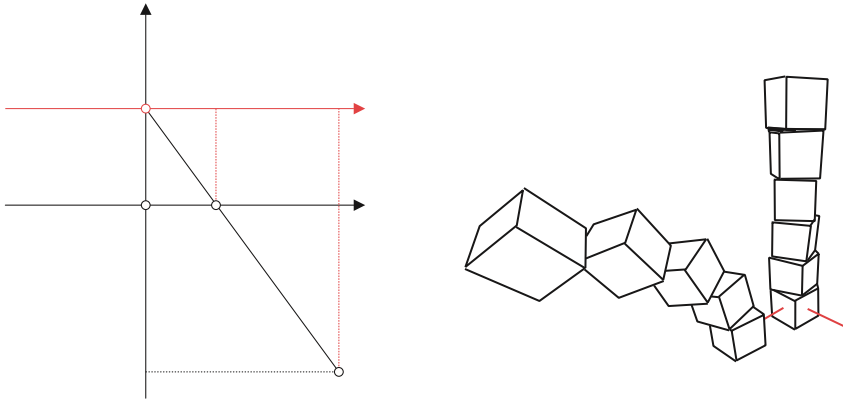


Figura 25 Proyección central

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{c}{Z+c} \quad (2.51)$$

y se reorganizó aún más para dar x' e y' :

$$x' = \frac{X}{\frac{Z}{c}+1} \quad y' = \frac{Y}{\frac{Z}{c}+1} \quad (2.52)$$

Si el centro de perspectiva (distancia focal c) se mueve hacia el infinito, el denominador se convierte en 1 y la proyección central cambia a una proyección paralela. Sin afectar a la validez, el sistema de coordenadas de la imagen se puede desplazar al centro de perspectiva (posición roja en la Fig. 2.18), lo que conduce a ecuaciones de proyección:

$$x' = \frac{-c}{Z} X = \frac{1}{m} X \quad y' = \frac{-c}{Z} Y = \frac{1}{m} Y \quad (2.53)$$

Dado por:

$$\bar{x} = T_z X$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ -Z/c \end{bmatrix}$$

y para las coordenadas homogéneas resultantes después de la división

por $m = -Z/c$:

$$X' = T_S^{-1} \bar{X} \quad (2.55)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c/Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c/Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c/Z & 0 \\ 0 & 0 & -1/Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cX/Z \\ -cY/Z \\ -c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/m \\ Y/m \\ -c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es obvio que las filas 3 y 4 de la matriz de transformación T_s son linealmente dependientes y la matriz no se puede invertir. Por lo tanto, no es posible calcular las coordenadas de objetos 3D a partir de coordenadas de imagen 2D en este caso.

Si el caso especial mencionado anteriormente se extiende a una orientación exterior arbitraria del plano de la imagen (posición y orientación en el espacio), la transformación de las coordenadas del objeto en coordenadas de imagen se puede realizar mediante la siguiente operación de matriz con respecto a la ecuación (2.49):

$$x' = T_s^{-1} T_z T_R^{-1} T_T^{-1} X \quad (2.56)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{m} & \frac{r_{21}}{m} & \frac{r_{13}}{m} & \frac{-(r_{11}X_0 + r_{21}y_0 + r_{31}Z_0)}{m} \\ \frac{r_{12}}{m} & \frac{r_{22}}{m} & \frac{r_{23}}{m} & \frac{-(r_{12}X_0 + r_{22}y_0 + r_{32}Z_0)}{m} \\ \frac{r_{13}}{m} & \frac{r_{23}}{m} & \frac{r_{33}}{m} & \frac{-(r_{13}X_0 + r_{23}y_0 + r_{33}Z_0)}{m} \\ \frac{-r_{13}}{cm} & \frac{-r_{23}}{cm} & \frac{-r_{33}}{cm} & \frac{r_{11}X_0 + r_{21}y_0 + r_{31}Z_0}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3. Técnicas de ajuste

2.4.6. El problema

Esta sección proporciona un resumen de algunas técnicas importantes para el cálculo de sistemas de ecuaciones sobre determinados y no lineales mediante métodos de ajuste. Estos son esenciales para la comprensión de numerosos cálculos fotogramétricos. En general, la tarea consiste en determinar una serie de parámetros desconocidos a partir de una serie de valores observados (medidos) que tienen una relación funcional entre sí. Si hay más observaciones disponibles de las requeridas para la determinación de las incógnitas, normalmente no hay una solución única y los parámetros desconocidos se estiman de acuerdo con modelos funcionales y estocásticos.

2.4.6.1. Modelo funcional

Un número de observaciones n (valores medidos) forman un vector de observación \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)^T \quad : \text{vector de observación} \quad (2.57)$$

Dado que los elementos del vector de observación son datos medidos, se considera que tienen pequeños efectos de error aleatorio, pero están libres de defectos sistemáticos. Esto también se puede llamar el vector aleatorio \mathbf{L} .

Se debe determinar *un número* u de parámetros desconocidos. Estos forman el vector de incógnitas \mathbf{X} , también llamado vector de parámetros.

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_u)^T \quad : \text{vector de incógnitas} \quad (2.58)$$

Se supone que el número de observaciones es mayor que el número de incógnitas.

$$n > u$$

El modelo funcional describe la relación entre los valores de observación "verdaderos" \mathbf{L} y los valores "verdaderos" de las incógnitas \mathbf{X} . Esta relación se expresa por el vector de funciones φ de las incógnitas

$$\tilde{\mathbf{L}} = \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \varphi_2(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\tilde{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}$$

Dado que los valores verdaderos normalmente no se conocen, el vector de observación es reemplazado por las observaciones $\bar{\mathbf{L}}$ medidas \mathbf{L} y el pequeño residuo \mathbf{v} asociado. Del mismo modo, el vector de incógnitas es reemplazado por las incógnitas

estimadas (ajustadas \hat{X}). Como resultado, se obtienen las siguientes ecuaciones de corrección no lineal:

$$\hat{L} = L + v = \varphi(\hat{X}) \quad (2.60)$$

Si se dispone de valores aproximados X^0 de las incógnitas, el vector de incógnitas se puede expresar como la siguiente suma:

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} \quad (2.61)$$

es decir, sólo deben determinarse los pequeños valores desconocidos.

A partir de los valores en X^0 , los valores aproximados de las observaciones se pueden calcular utilizando el modelo funcional:

$$L^0 = \varphi(X^0) \quad (2.62)$$

De esta manera se obtienen observaciones reducidas (observadas menos calculadas):

$$l = L - L^0 \quad (2.63)$$

Para valores suficientemente pequeños de \hat{x} , las ecuaciones de corrección se pueden expandir en una serie de Taylor alrededor de los valores aproximados X^0 , ignorando los términos después del primero:

$$L + v = \varphi(X^0) + \left(\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial X_1}\right)_0 (\hat{X} - X^0) = L^0 + \left(\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial X_1}\right)_0 \hat{x} \quad (2.64)$$

Después de la introducción de la matriz jacobiana A , también conocida como el diseño, modelo o matriz de coeficientes:

$$A_{n,u} = \left(\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial X_1}\right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial X_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial X_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial X_u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial X_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial X_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial X_u}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial X_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial X_2}\right)_0 & \dots & 1 \left(\frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial X_u}\right)_0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

se obtienen las ecuaciones de corrección linealizadas:

$$\frac{l}{n,1} = \frac{1}{n,1} + \frac{v}{n,1} - \frac{A}{n,u} \frac{\hat{x}}{u,1} \quad (2.66)$$

La matriz jacobiana A consiste en cocientes diferenciales que describen la relación funcional entre los parámetros y que se calculan a partir de valores aproximados. El vector de incógnitas contiene los parámetros estimados y l es el vector de observaciones reducidas. En la sección 2.3.2.2 se ofrece un esquema de cálculo.

2.4.6.2. Modelo estocástico

Las propiedades estocásticas de las incógnitas L están definidas por la matriz de

covarianza K_{ii}

$$\frac{K_{11}}{n,n} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

where σ_i : standard deviation of observation $L_i, i = 1 \dots n$

ρ_{ij} : correlation coefficient between L_i and $L_j, i \neq j$

Introduciendo el factor de multiplicación σ_0^2 , se obtiene la matriz de cofactor Q_{ii} de observaciones:

$$Q_{11} = \frac{1}{\sigma_0^2} K_{11} = P^{-1}$$

donde P_{ii} es la matriz de peso.

La matriz de covarianza es el único componente que contiene información sobre la precisión del modelo funcional en el proceso de ajuste. Por lo tanto, se denomina modelo estocástico (ver sección 2.3.3.1) En el caso de observaciones independientes, los coeficientes de correlación pasan a ser cero y la matriz de covarianza se reduce a una matriz diagonal. Este es el caso estándar para muchos problemas de ajuste en los que se dan observaciones independientes o no se dispone de un conocimiento significativo sobre las correlaciones entre las observaciones.

La matriz de peso P se convierte entonces:

$$\frac{P}{n,n} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_N \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

En este caso una observación L_i con desviación estándar $\sigma_i = \sigma_0$ tiene peso

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = 1$$

y P se convierte en la matriz de identidad I . σ_0 es el valor verdadero de la desviación estándar de la unidad de peso (desviación estándar de una observación con peso = 1). Se puede considerar como una constante de multiplicación.

Por lo general, la verdadera desviación estándar σ no se conoce en aplicaciones prácticas y en su lugar se utiliza la desviación estándar empírica s . Aquí s denota la

desviación estándar *a priori*, mientras que representa la desviación estándar \hat{s}_a *posteriori* (desviación estándar ajustada). La desviación estándar empírica solo es significativa en casos de redundancia significativa.

2.4.7. Método de mínimos cuadrados (modelo lineal de Gauss-Markov)

El modelo de ajuste de Gauss-Markov se basa en la idea de que los parámetros desconocidos se estiman con la máxima probabilidad. Suponiendo un conjunto de datos con un número infinito de valores medidos y errores normalmente distribuidos (parámetro de no centralidad $\Delta = 0$, es decir, sin errores sistemáticos), la siguiente condición para los residuos resulta:

$$V^T P v \rightarrow \min! \quad (2.70)$$

Para observaciones independientes se reduce a

$$\sum_{i=1}^n P_i v_i^2 = [p v v] \rightarrow \min! \quad (2.71)$$

Se conoce como ajuste o minimización de mínimos cuadrados utilizando la norma L2. El modelo de Gauss-Markov asegura que los parámetros desconocidos se estiman de manera imparcial y con una varianza mínima.

2.4.7.1. Ajuste de las observaciones directas

Considere una serie de mediciones directas de un solo valor desconocido, por ejemplo, a partir de mediciones repetidas. El modelo funcional se reduce entonces en la medida en que la cantidad requerida es simplemente la media de las observaciones.

Para las observaciones con precisión individual, los pesos correspondientes se estiman a partir de las desviaciones estándar *a priori* de las observaciones originales s_i y del peso unitario s_0 :

$$p_i = \frac{s_0^2}{s_i^2} : \text{ peso de la observación } i \quad (2.72)$$

El peso p_i también se puede derivar del número de mediciones repetidas si se dispone de múltiples valores para observaciones específicas. En el caso de precisiones uniformes, el peso se simplifica a $p_i = 1$.

La estimación desconocida se obtiene por la media geométrica (ponderada):

$$\hat{x} = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + \dots + P_n l_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i l_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (2.73)$$

El residuo de una observación i da:

$$v_i = \hat{x} - l_i \quad (2.74)$$

Después del ajuste, la desviación estándar a posteriori del peso unitario viene dada por

$$\hat{S}_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{n-1}} \quad (2.75)$$

La desviación estándar a posteriori de la observación original i viene dada por

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{S}_0}{\sqrt{P_i}} \quad (2.76)$$

La desviación estándar del valor medio es, en este caso, igual a la desviación estándar de las observaciones ajustadas:

$$\hat{S}_{\hat{x}} = \frac{\hat{S}_0}{\sqrt{[P]}} \quad (2.77)$$

2.4.7.2. Ajuste general de mínimos cuadrados

$$Q_{ll} = \frac{1}{s_0^2} K_{ll} = P^{-1} \quad : \text{ modelo estocástico}$$

con n observaciones y u incógnitas, $n > u$. Para configurar la matriz de peso \mathbf{P} , se requieren las desviaciones estándar *a priori* de las observaciones s_i y la desviación estándar *a priori* del peso unitario s_0 . Podrían, por ejemplo, derivarse de la precisión empíricamente conocida de un dispositivo de medición:

$$p_i = \frac{s_0^2}{s_i^2} \quad : \text{ peso de la observación } i$$

Después de la generación de valores iniciales, la creación de la matriz jacobiana \mathbf{A} y el cálculo de observaciones reducidas \mathbf{l} , se puede utilizar el siguiente esquema de cálculo para calcular el vector de incógnitas (Pelzer 1985):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \quad : \text{ matriz de peso}$$

$$\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad : \text{ normal equations} \quad (2.78)$$

donde

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad : \text{ matriz de ecuaciones normales}$$

$$n, l \quad n, u u, l \quad n, l$$

El sistema de ajuste debe resolverse iterativamente si solo se dan valores aproximados gruesos para problemas no lineales (por ejemplo, ajuste de paquetes). En este caso, los valores aproximados corregidos en la iteración k del paso (6) se utilizan como nuevos valores iniciales para el modelo funcional linealizado de la siguiente iteración $k+1$, hasta que la suma de las correcciones añadidas para las incógnitas sea menor que un umbral dado.

$$\mathbf{X}_{0k+1} = \mathbf{X}_{0k} + \hat{\mathbf{x}}_k$$

Para resolver el sistema normal de ecuaciones (2) en el paso (3), la matriz jacobiana \mathbf{A} tiene que ser de rango de columna completa.

$$r = \text{rank}(\mathbf{A}) = u$$

n, u

Este requisito significa que las observaciones incluidas permiten una solución única para el vector de incógnitas y que existe la inversa de la matriz de ecuación normal \mathbf{N} . Para los problemas de ajuste en los que faltan algunas observaciones para una solución única, se detecta un defecto de rango

$$d = u - r \quad : \text{rank defect} \quad (2.81)$$

Este problema se produce, por ejemplo, en el ajuste de puntos en sistemas de coordenadas que no están definidos de forma única por puntos de referencia conocidos, u otras observaciones adecuadas

2.4.7.3. 2.3.2.3 Ajuste de mínimos cuadrados condicionales

El método anterior de ajuste general de mínimos cuadrados se basa en un conjunto de ecuaciones de observación que modelan las observaciones medidas en función de las incógnitas. Un modelo de ajuste extendido se produce cuando se incorporan restricciones adicionales entre las incógnitas. Este método puede denominarse ajuste de mínimos cuadrados condicionales. Los siguientes casos son ejemplos de tales restricciones entre incógnitas.

Las coordenadas de una serie de puntos de objeto ajustados deben ubicarse en un elemento geométrico común, por ejemplo, una línea recta, un plano o un cilindro.

Dos puntos de objeto ajustados deben tener una separación fija resultante, por ejemplo, de una medición de distancia de alta precisión entre ellos.

Las ecuaciones de corrección derivadas e se extienden entonces por un número r' de restricciones no lineales:

$$\Psi(\tilde{X}) = \begin{bmatrix} \Psi_1(\tilde{X}) \\ \Psi_2(\tilde{X}) \\ \vdots \\ \Psi_{r'}(\tilde{X}) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{:restricciones} \quad (2.82)$$

Usando valores aproximados, estas ecuaciones de restricción se linealizan de manera análoga a las ecuaciones de observación:

$$B = \left(\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right)_0 \quad \text{: ecuaciones de restricción linealizadas} \quad (2.83)$$

Inconsistencias w resultan del uso de valores aproximados en lugar de valores esperados para las incógnitas:

$$B\hat{x} = -w \quad \text{: vector de inconsistencias} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} A\hat{x} - 1 &= v && \text{: vector de inconsistencias} && (2.85) \\ B\hat{x} + w &= 0 \end{aligned}$$

El modelo de Gauss-Markov (2.70) debe extenderse de la siguiente manera:

$$v^T P v + 2K(B\hat{x} + w) \rightarrow \min \quad (2.86)$$

lo que conduce al siguiente sistema normal extendido de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} A^T P A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^T P I \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad \text{equiparaciones normales} \quad (2.87)$$

$$\bar{N} \quad \bar{x} + \quad \bar{n} \quad = 0$$

Aquí k es el vector de los multiplicadores lagrangianos. Los valores numéricos de k normalmente no son de interés, aunque la condición de que $A P v^T + B k^T = 0$ se puede probar su validez. Por lo tanto, solo los primeros elementos u del vector de solución \bar{x} son importantes.

La desviación estándar a posteriori viene dada por:

$$\hat{S}_0 = \sqrt{\frac{[p v v]}{n-u+r'}} = \sqrt{\frac{p v^2}{n-u+r'}} \quad (2.88)$$

La redundancia f (grados de libertad definidos por el número de observaciones excesivas) cambia a $f = n - u + r'$. Por lo tanto, las restricciones adicionales pueden aumentar la redundancia o pueden compensar eficazmente las observaciones faltantes que conducen a un defecto de rango.

2.4.8. Medidas de calidad

La Fig. 2.19 ilustra la relación entre el valor verdadero \tilde{X} , el valor esperado μ_x , la media o valor ajustado \tilde{x} y la observación única x_i . El valor verdadero y el valor esperado pueden diferir debido a errores sistemáticos Δ_x . La verdadera desviación η_i es la suma de un componente sistemático Δ_x y un componente aleatorio ϵ_i .

Dado que el valor verdadero y el valor esperado son desconocidos con un número finito de mediciones, la evaluación de la calidad de los valores medidos se basa en sus residuos v_i . Los valores de calidad que se analizan a continuación se basan en medidas estadísticas. En función de la aplicación, la calidad de un valor medido (por ejemplo, el ajuste entre el cilindro y el orificio) debe evaluarse potencialmente teniendo en cuenta las condiciones asociadas pertinentes.

2.4.8.1. *Precisión y exactitud*

La exactitud de las observaciones y las incógnitas ajustadas son de interés primordial cuando se analiza la calidad en un procedimiento de ajuste. Los valores estocásticos calculados proporcionan información sobre la calidad del modelo funcional con respecto a los datos de entrada. Este criterio se conoce como precisión, ya que describe una calidad interna del proceso de ajuste. Por el contrario, el término exactitud solo debe utilizarse si se realiza una comparación con datos de referencia de mayor precisión. Sin embargo, en la práctica la precisión es ampliamente utilizada como un término general para la calidad.

CAPÍTULO III

3. Marco Metodológico

3.1. Diseño metodológico

3.1.1. Enfoque

De acuerdo, con Hernández, Fernández y Baptista (2019), la presente investigación obedece a un enfoque mixto, los instrumentos de recolección de la información se construyeron y se validaron internacionalmente, con el fin de asegurar un tratamiento eficiente de los datos para dar luego paso a un análisis e interpretación de los resultados. En este orden los autores en mención sostienen que los enfoques mixtos sean posicionando en la actualidad como una estrategia de investigación que permite combinar la metodología cualitativa y cuantitativa, aun cuando en el pasado han sido corrientes opuestas.

Esta estrategia de investigación se ubica dentro de los marcos metodológicos denominados multimétodos o métodos mixtos, ella apunta a la combinación de lo cualitativo y cuantitativo con el fin de alcanzar una metodología eficiente al problema a investigar. Lo anterior permitió obtener resultados de estudio en un primer lugar desde un tratamiento estadístico que llevo luego producir propuestas basadas en realidades sistémicas, que lleven a conclusiones y recomendaciones del estudio, en función del objetivo general y los objetivos específicos planteados en él y el problema trabajado.

En este orden bajo un enfoque mixto se busca una mayor optimización y una correcta articulacion, en palabras de López (2014) se ofrece una interpretación completa de los fenómenos que ocurren en la enseñanza de la estereofotogrametría, esto ajustado desde el planteamiento del problema. Este planteamiento corresponde al problema en estudio ya que determina bajo un marco categorial y desde una mirada mundial el desarrollo didáctico del tema, para luego buscar estrategias de intervención validadas por agentes de la comunidad educativa a nivel internacional.

3.2. Diseño

El trabajo investigativo se realiza desde un diseño no experimental bajo los postulados Creswell y Cázares (2005), atendiendo la necesidad de estudiar y plantear posibles soluciones a los problemas dados en la enseñanza de la estereofotogrametría de manera que la investigación pasa a ser motor y proveedor de soluciones a problemas. El proceso de investigación guarda absoluto respeto por el objeto de investigación y tiene en cuenta todas las consideraciones bioéticas que la universidad propende manteniendo con sumo cuidado la información.

El diseño de la investigación establece de manera razonablemente y lógica el mejor tratamiento para el problema buscando con ello recoger la información, el análisis y la generación de los lineamientos o factores que permitirán consolidar una propuesta didáctica que garanticen mejores procesos en la enseñanza de la estereofotogrametría.

3.3. Alcance

En relación a los planteamientos de Rusu (2011), el alcance de este trabajo investigativo es evaluativo, este se realiza desde una base teórica que permite diseñar instrumentos fiables, que luego se aplican encontrando información categorizada, esta información permite encontrar las realidades sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estereofotogrametría. Para este contexto se observa con total profundidad las necesidades a nivel mundial sobre los aspectos de la materia, esto permite establecer cómo los diversos fenómenos entre sí; los aspectos tecnológicos de comprensión del fenómeno, de recursos y las afectaciones pueden presentarse en el problema.

El resultado del alcance permitirá formular una propuesta bajo sólidas bases teóricas, recopilar datos cuantitativos y cualitativos y abordando la enseñanza de un fenómeno a nivel mundial que desde luego lleva a la construcción de nuevos referentes, que aportarán a nuevas miradas y otras formas de aproximación y profundo abordaje del problema.

3.4. Técnica

El presente trabajo de investigación recoge información a partir de diversos momentos que consolidan una multiétnica, privilegiando en un primer momento la técnica documental, porque selecciona bajo ecuaciones de búsqueda en bases de datos de alto impacto más de 180 documentos indexados, con esto se atiende el objetivo específico número uno. Para el objetivo número dos y con base en los referentes construidos bajo técnica documental se aplican dos instrumentos que se enfocan el primero hacia los procesos de pensamiento geométrico y matemático y el segundo enfocado hacia el descubrimiento de procesos de orden técnico que realizan los estudiantes a nivel mundial.

Esta aplicación multi técnica deja claro las bondades de la investigación, contrasta los referentes teóricos y luego de forma clara realiza comprensiones de un fenómeno que lleva a construir propuesta para mejorar la enseñanza de la estereofotogrametría.

3.4.1. Técnica Documental

Las técnicas documentales aplicada en la presente investigación consisten en la identificación, recogida y análisis de documentos relacionados con la enseñanza de la estereofotogrametría a nivel mundial. En este caso, la información se recoge directamente de fuentes primarias indagando en 180 documentos con el fin de establecer categorías significativas que se trazan desde la comprensión y desarrollo de pensamiento geométrico – matemático, el uso de estrategias didácticas y el uso y aplicación de recursos.

Los documentos analizados obedecen a la ecuación de búsqueda TITLE-ABS-KEY (stereophotogrammetry) AND (LIMIT-TO (OA , "all") OR LIMIT-TO (OA , "publisherfullgold") OR LIMIT-TO (OA , "publisherhybridgold")) AND (LIMIT-AND (LIMIT-TO (SUBJAREA , "ENGI") OR LIMIT-TO (SUBJAREA , "COMP")) usada en el motor bibliométrico Scopus y analizadas mediante aplicación de software Voswiever en el periodo comprendido de enero de 2019 a junio del mismo año. Lo anterior se puede considerar bajo un estricto ejercicio que consolido aspectos categoriales de análisis.

La encuesta

Se hace uso de encuesta y toma un referente un gran número de situaciones de situaciones que señalan el cuestionario como una técnica cuantitativa, aunque García y Rodríguez (1999), la proponen en la actualidad como un complemento importante para la recolección de datos en diseños cualitativos, los mismos autores, definen los cuestionarios como una forma de encuesta caracterizada, también Bernal (2010), define la encuesta como aquella que permite recabar información para alcanzar los objetivos del proyecto de investigación a través de la estandarización y uniformidad de datos.

Lo que permite ser una técnica importante al momento de la recolección rasgos etnográficos y conectados a las categorías del estudio y el diseño maestral de esta investigación que contempla un diseño mixto, desde la misma intencionalidad del estudio de la inclusión educativa quien que parte epistemología abarca un universo multidisciplinar muy amplio, desde la comprensión de teorías hasta la propuesta de nuevos conceptos para el abordaje d su trabajo practico y teórico.

3.5. Validación por expertos

La Validación del cuestionario se elaboró por constructo y análisis confirmatorio, teniendo en cuenta como población aplicar, los directivos y administrativos, docentes, docentes orientadores, estudiantes y padres de familia desde cinco categorías fundamentales gestión, caracterización de la población, estrategias de inclusión, participación e infraestructura preguntas trabajadas y adaptadas al contexto de la encuesta de inclusión educativa de MEN (Ministerio de educación nacional).

Los instrumentos a revisar fueron dos encuestas, estas las revisaron dos doctores y los mismos tuvieron en cuenta la suficiencia en los criterios de claridad, pertinencia, ubicación y suficiencia. Aspectos para evaluar cada una de las preguntas de los cuestionarios.

Se consideraron las categorías valoradas en los instrumentos en el marco de la gestión, caracterización, estrategias de inclusión participación e infraestructura, teniendo como base si estas se presentaron, con un óptimo soporte teórico actualizado y pertinente, para cada uno de los grupos a los cuales se les aplico el instrumento.

3.6. Diseño Muestral

La definición del universo se ha realizado, teniendo en cuenta las universidades en el mundo en donde está incluida la estéreo fotogrametría como núcleo temático de la fotogrametría digital avanzada. En este primer momento, se ha tenido un total de 111 universidades (consolidado en las Tablas 2, 3, 4 y visualizadas geográficamente en la figura 26), ubicadas a lo largo y ancho del mundo. Se ha realizado un inventario de la localización geográfica de la universidad, obteniendo las variables de latitud y longitud geográfica, el país, la ciudad, la universidad, la facultad, la dependencia o el programa académico, el proyecto curricular al que pertenece, al igual que, un establecimiento del contacto vía correo electrónico, el número de estudiantes pertenecientes al programa y finalmente el continente, al cual pertenece el país donde se encuentra la universidad. lo anterior arrojó un número total de 2831 estudiantes, tal como está registrado en la tabla número 2.

3.6.1. Definición del Universo (población - muestra).

La población escogida para hacer la intervención es un grupo específico de estudiantes que están relacionados con el aprendizaje de la Esther fotogrametría dentro del pensum académico de la fotogrametría digital avanzada. está población pertenece a diferentes universidades en el mundo y está determinada gracias al número de integrantes total de la clase particular. Finalmente, se realizó el cálculo de la muestra de 479 estudiantes, en 19 universidades, las cuales se encuentran relacionadas en la tabla 5 y la especialización del país al que perteneces cada una de ellas en la figura 27.

3.6.1.1. Métodos de selección de la muestra.

Para poder obtener la muestra final se ha realizado un cálculo del tamaño de la muestra para una población finita, utilizando la fórmula:

$$n = \frac{Nz^2p(1-p)}{(N-1)e^2 + z^2\rho(1-\rho)}$$

donde:

n = Tamaño de la muestra

N = Tamaño de la Población o Universo

Z = Parámetro estadístico que depende del Nivel de confianza (95%)

e = Error de estimación máximo aceptado

p = Probabilidad de que ocurra el evento

$q = (1 - p)$ Probabilidad de que no ocurra el evento

y para este caso teniendo los valores:

$N = 2831$

$Z = 1.96$

$e = 4\%$

$P = 60\%$

ID	LATITUD	LONGITUD	PAIS	CIUDAD	UNIVERSIDAD	FACULTAD	DEPENDENCIA	PROGRAMA O PROYECTO CURRICULAR
1	38.90656	-6.339548	España	Mérida	Universidad de Extremadura	Centro universitario de Mérida	Cartográfica, geodesia y fotogrametría	Ingeniería geomática y topografía
2	41.38778	2.113461	España	Barcelona	Universidad politécnica de Cataluña	Ingeniería del terreno, cartográfica y geofísica	Departamento de ingeniería civil	Geomática y topografía
3	28.07004	-15.45567	España	Las palmas	Universidad de las palmas de gran Canarias	Ingeniería y arquitectura	Escuela de ingenierías industriales y civiles	Ingeniería Geomática
4	42.3511	-3.688895	España	Burgos	Universidad de burgos	Ingeniería y arquitectura	Ingeniería	Ingeniería de tecnologías de camino
5	36.71986	-4.416086	España	Málaga	Universidad de Málaga	Instituto de estudios de postgrado de la universidad de c	Instituto de estudios de la universidad de córdoba.	Ingeniería y arquitectura
6	47.37632	8.547326	Suiza	Zúrich	Universidad política federal de Zúrich	Ingeniería civil, ambiental y geomática	Ingeniería civil, ambiental y geomática	ingeniería geodesia y fotogrametría
7	48.78138	9.173473	Alemania	Stuttgart	Universidad de ciencias aplicadas de Stuttgart	Ingeniería aeroespacial y geodesia	Ingeniería geomática	Maestría en ingeniería geomática
8	40.38915	-3.63013	España	Madrid	Universidad politécnica de Madrid	E.T.S.I. En topografía geodesia y cartografía, campus sur	Programa de ingeniero/a geomático	Ingeniería geodésica y cartografía
9	37.78845	-3.777653	España	Jaén	Universidad de jaén.	Campus las lagunillas	Departamento ingeniería cartográfica	Geodésica y fotogrametría
10	43.24051	-5.77659	España	Asturias	Universidad de Oviedo.	Campus de Mieres	Escuela politécnica de Mieres	Ingeniería en geomática y topografía
11	41.38428	2.119948	España	Barcelona	Universidad de Barcelona.	Facultad de ciencias de la tierra	Dinámica de la terra i de l'oceà	Geografia
12	37.38076	-5.991231	España	Sevilla	Universidad de Sevilla.	Ciencias sociales y jurídicas	Geografía	Geografía y gestión del territorio
13	42.55082	-6.580996	España	León	Universidad de león.	Campus de Ponferrada	Escuela superior y técnica de ingenieros de minas	Ingeniería en geomática y topografía
14	39.48079	-0.340941	España	Valencia	Universidad politécnica de valencia.	Ingeniería y arquitectura	Campus de vera (valència)	Ingeniería en geomática y topografía
15	40.65126	-4.679071	España	Ávila	Universidad de salamanca.	Escuela politécnica superior de Ávila	Ingeniería geomática y topografía	Ingeniería y arquitectura
16	22.28304	114.13707	Hong Kong	Kowloon To	La universidad de Hong Kong	Arquitectura	Departamento de arquitectura e ingeniería civil	Licenciatura en ciencias en agrimensura
17	1.559364	103.63838	Malaysia	Skudai	Universidad Tecnológica de Malaysia	Facultad de medio ambiente construcción y topografía	Departamento de arquitectura	Licenciatura en agrimensura
18	33.88466	35.495306	Libano	Beirut	Universidad internacional libanesa	Escuela de ingeniería	Escuela de ingeniería	Licenciatura en ingeniería topográfica
19	42.83925	-2.674297	España	País vasco	Escuela universitaria de ingeniería de Vitoria-G	Campus de Álava	Campus de álava	Ingeniería geomática y topografía
20	57.11858	-2.134204	Reino uni	Aberdeen	Universidad Robert Gordon	Escuela de arquitectura y entorno construido Scott Suther	Ingeniería y arquitectura	Topografía
21	-26.1945	28.055429	South Áfr	Johannesbu	Universidad de Johannesburgo	Centro de investigación e innovación aplicadas en el ent	Departamento de administración de la construcción	Topografía
22	-1.28034	36.816091	Kenia	Nairobi	Universidad de Nairobi	Arquitectura e ingeniería	Departamento de tecnología geoespacial y espacial	Tecnología geoespacial y espacial
23	-1.29085	36.825249	Kenia	Nairobi	Universidad técnica de Kenia	Ingeniería y medio ambiente construido	Geoinformación y observación de la tierra	Topografía y ciencia geoespacial
24	-1.29193	36.824526	Kenia	Nairobi	Universidad Moi	Escuela de ciencias aeroespaciales	Escuela de ciencias aeroespaciales	Licenciatura en ciencias aeroespaciales
25	30.02277	31.20732	Egipto	Guiza	Universidad de el Cairo	Escuela de ingeniería	Escuela de ciencias aeroespaciales	Ingeniería aeroespacial
26	5.650532	-0.196212	Ghana	Acra	Universidad de Ghana	Campus principal de Legon	Departamento de ciencias de la tierra	Ciencias de la tierra
27	-0.31667	36.899999	Kenia	Nyahururu	Universidad de Laikipia	Facultad de ciencias y tecnología aplicada	Departamento de ciencias de la tierra	Licenciatura en geografía
28	0.329282	32.571077	Uganda	Kampala	Universidad Makerere	Facultad de Ingeniería, Diseño, Arte y Tecnología (CEDA)	Departamento de geomática y ordenación del territorio	Licenciatura en ciencias en topografía y geom
29	0.347491	32.632108	Uganda	Kampala	Universidad Kyambogo	Facultad de ingeniería	Departamento de tierras y estudios arquitectónicos	Licenciatura en agrimensura y sistemas de inf
30	36.83344	10.147555	Túnez	Túnez	Universidad de Túnez el manar	Facultad de ciencias matemáticas, físicas y naturales de	Departamento de ciencias geológicas	Geomática, tierra y medio ambiente
31	33.8534	10.101896	Túnez	Gabés	Universidad de Gabès	Facultad de ciencias de Gabès	Departamento de ciencias de la tierra	Licencia fundamental en ciencias de la tierra
32	55.78557	12.521381	Dinamarca	Kongens lym	Universidad técnica de Dinamarca	Campus lyngby	30 instituto nacional del espacio	Ingeniería física de la tierra y el espacio
33	51.04654	3.727916	Bélgica	Ghent	La universidad de gante	Facultad de ingeniería y arquitectura	Kortrijk	Ciencias en tecnología de ingeniería de agrime
34	55.68023	12.57241	Dinamarca	Copenhague	Universidad de Copenhague	Departamento de geociencias y gestión de la naturaleza	Departamento de geociencias y gestión de la naturaleza	Programa de licenciatura en geografía y geoin
35	48.14966	11.56786	Alemania	Múnich	Universidad técnica de Múnich	Departamento de geodesia y aeroespacial	Departamento de geodesia y aeroespacial	Cartografía
36	52.23874	6.850593	Países ba	Enschede	Universidad de Twente	Departamento de procesamiento de geo información	Departamento de procesamiento de geoinformación	Cartografía
37	48.19866	16.368463	Austria	Viena	La universidad tecnológica de Viena	Departamento de geodesia y geo información.	Departamento de geodesia y geoinformación	Cartografía
38	51.02927	13.728996	Alemania	Dresden	Universidad técnica de Dresden	Instituto de cartografía	Instituto de cartografía	Cartografía
39	59.34987	18.070257	Suecia	Estocolmo	Real instituto de tecnología o kungliga tekniska	Arquitectura y entorno construido	Maestría en ciencias	Tecnología de transporte y geoinformación
40	57.01418	9.984663	Dinamarca	Aalborg	Universidad de Aalborg	Facultad técnica de tecnología de la información y diseño	Departamento de planificación	Topografía, planificación y ordenación del terr

Tabla 2 Universidades donde se enseña fotogrametría Digital

41	40.65234	-4.684817	España	Ávila	Universidad de salamanca.	Ingeniería geomática y topografía	Escuela politécnica superior de ávila	Ingeniería y arquitectura
42	40.54541	-3.695173	España	Madrid	Universidad Autónoma de Madrid	Facultad de ciencias	Campus canto blanco	Ciencias ambientales y en geografía y ordenaci
43	37.88498	-4.767315	España	Córdoba	Universidad de Córdoba	Ingeniería y arquitectura	La eps de velmes	Ingeniería de la energía y recursos minerales
44	41.85203	12.628999	Italia	Roma	Universidad de roma tor Vergata	Ingeniería	Ingeniería civil y informatica	Ingeniería civil
45	45.46014	9.194585	Italia	Milán	Universidad de Milán	Facultad de ciencia y tecnologia	Departamento de ciencias de la tierra	Ciencias geológicas
46	40.3358	-3.876884	España	Madrid	Universidad rey juan Carlos	Ingeniería y arquitectura	Escuela técnica superior de ingeniería de telecomunica	Ingeniero técnico aeronáutico
47	38.38525	-0.514318	España	Alicante	Universidad de alicante	Geografía	Análisis geográfico regional y geografía física	Geografía y ordenación del territorio
48	56.00454	92.766131	Rusia	San Peterst	Universidad federal de Siberia	Ecología y geografías	Departamento de geografía	Geografía
49	42.8392	-2.234082	España	Euskara	Universidad del país Vasco	Ingeniería	Escuela de ingeniería de vitoria-gasteiz	Grado en ingeniería en geomática y topografía
50	40.50865	-3.344192	España	Madrid	Universidad de Alcalá	Ingeniería y arquitectura	Campus científico tecnologico	Tecnologías de la información geográfica
51	41.658	-4.712448	España	Valladolid	Universidad de Valladolid	Geografía	Departamento de geografía	Geografía
52	35.60512	139.68353	Japón	Tokio	Instituto de tecnología de Tokio	Ciencias de la tierra y planetarias	Departamento de ciencias de la información	Ciencias y tecnología de la información.
53	57.16558	-2.10411	Escocia	Aberdeen	Universidad de Aberdeen	Escuela de ingeniería, geociencias y ciencias naturales y	Escuela de geociencias	Geografía y medio ambiente
54	55.87214	-4.288917	Escocia	Glasgow	Universidad de Glasgow	Facultad de ciencias geográficas y de la tierra	Escuela de ciencias geográficas y de la tierra	Maestría en geomática y gestión
55	53.8066	-1.555249	Reino uni	Leeds	Universidad de Leeds	Facultad de geografía	Escuela de geografía	Licenciatura en geografía
56	55.94452	-3.189241	Escocia	Edimburgo	Universidad de Edimburgo	Facultad de ciencias e ingeniería	Escuela de geociencias	Geología y geografía física
57	53.46712	-2.234082	Reino uni	Manchester	Universidad de Manchester	Escuela de medio ambiente, educación y desarrollo	Departamento de ciencias de la tierra y ambientales	Ciencias de la tierra y planetarias
58	-37.7938	144.89833	Australia	Melbourne	Universidad de victoria	Facultad de ingeniería y ciencias	Entorno construido	Licenciatura en topografía
59	-33.8141	151.0066	Australia	Sidney	Universidad de western Sidney	Centro de ingeniería de infraestructura	Ingeniería, tic y diseño industrial	Licenciatura en ingeniería - construcción
60	-37.8222	145.03896	Australia	Melbourne	Universidad tecnológica de Swinburne	Facultad de ciencias, ingeniería y tecnología	Departamento de ingeniería mecánica y de diseño de p	Modelado de información de construcción
61	-37.8029	144.95997	Australia	Melbourne	Universidad Rmit	Facultad de ciencias	Ciencias geoespaciales	Certificado de posgrado en ciencias geoespac
62	-37.9106	145.13625	Australia	Melbourne	Universidad de Monash	Facultad de ciencias	Escuela de tierra, atmósfera y medio ambiente	Ciencias de la tierra
63	45.18673	9.155894	Italia	Pavía	Universidad de Pavia	Facultad de ingeniería	Facultad de ingeniería	Ingeniería civil y ambiental
64	45.51844	9.213105	Italia	Milán	Universidad de milano-bicocca	Facolta' di scienze matematiche fisiche e naturali	Departamento de ciencias ambientales y de la tierra	Ciencias y tecnologías para el medio ambiente y
65	44.80079	10.325893	Italia	Parma	Universidad de Parma	Ingeniería civil y ambiental	Departamento de ingeniería y arquitectura.	Ingeniería civil y medioambiental
66	38.75266	-9.158245	Portugal	Lisboa	Universidad de lisboa	Facultad de ciencias	Ingeniería, tecnologías y gestión de la información	Sistemas de información geográfica - tecnología
67	40.27792	-7.50899	Portugal	Covilhã	Universidade da beira interior	Facultad de ingeniería	Departamento de ingeniería civil y arquitectura	Ingeniería civil
68	38.73368	-9.160333	Portugal	Lisboa	Universidad nova de Lisboa	Facultad de ciencia y tecnologia	Departamento de ciencias de la tierra	Ingeniería geológica
69	40.20891	-8.424149	Portugal	Coimbra	Universidad de Coimbra	Ciencias de la tierra	Departamento de ciencias de la tierra	Geociencias
70	12° 3'21.69"	77° 5'3.92"	Perú	Lima	Universidad nacional mayor de San Marcos	Facultad de ingeniería geológica, minera, metalúrgica y ge	Ingeniería geográfica	Fotogrametría
71	15°49'27.90"	70° 0'58.48"	Perú	Puno	Universidad nacional del altiplano	Facultad de ciencias agrarias	Ingeniería topográfica y agrimensura	Ciencias agrarias
72	18°29'8.93"	69°56'54.00"	Rep Dom	Santo domin	Universidad nacional pedro Henríquez Ureña	Facultad de ciencias y tecnología	Licenciatura en agrimensura	Agrimensura
73	34°54'9.32"	56°10'35.52"	Uruguay	Montevideo	Universidad de la república	Facultad de ingeniería.	Ingeniería agrimensura	Ingeniería geociencias
74	10°29'18.06"	66°53'21.01"	Venezuela	Caracas	Universidad central de Venezuela	Facultad de ingeniería.	Ingeniería geodésica y agrimensura	Ingeniería civil
75	55°42'09"	37°31'50"	Rusia	Moscú	Universidad estatal de Moscú	Geografía	Cartografía y geoinformática	Department of cartography and geoinformatics
76	44°49'06"	20°27'27"	Serbia	Belgrado	University of belgrade	Ingeniería civil	Geodesy and geoinformatics	Remote sensing
77	55°42'21"	13°11'36"	Suecia	Lund	Lund University	Faculty of environment	Geographic information technology	Geography and ecosystem science
78	59°56'31"	30°17'56"	Rusia	San Peterst	Universidad de San Petersburgo	Natural Sciences	Cartography and geoinformatics	Cartography and geoinformatics
79	4°20'4.11"	74°22'10.97"	Colombia	Fusagasuga	Universidad de Cundinamarca	Facultad de ciencias agropecuarias	Tecnología en cartografía	Tecnología en cartografía
80	4°18'23.24"	74°48'23.45"	Colombia	Girardot	Universidad de Cundinamarca	Facultad de ciencias agropecuarias	Ingeniería ambiental	Fotogrametría y cartográfica

Tabla 3 Universidades donde se enseña fotogrametría Digital (2)

81	14°34'18.1	90°32'51.57	Guatemala	Ciudad de Guatemala	Universidad de san Carlos	Centro universitario de oriente	Ingeniería en administración de tierras	Fotogrametría digital	cunori.edu.gt
82	14°35'18.8	90°33'5.74	Guatemala	Ciudad de Guatemala	Universidad de san Carlos	Facultad de agronomía	Recursos naturales renovables	Fotogrametría y fotointerpretación	cunori.edu.gt
83	55°42'09"	37°31'50"	Rusia	Moscú	universidad estatal de Moscú	Geografía	Cartografía y geoinformática	Digital photogrammetry	info@geogr.msu.ru
84	44°49'08"	20°27'27"	Serbia	Belgrado	University of belgrade	Ingeniería civil	Geodesy and geoinformatics	Photogrammetry and remote sensing	mimas@grf.bg.ac.rs
85	55°42'21"	13°11'36"	Suecia	Lund	Lund university	Faculty of environment	Geographic information technology	Geography and ecosystem science	iga@ujep.cz
86	59°56'31"	30°17'56"	Rusia	San Petersburgo	St petersburg university	Natural sciences	Cartography and geoinformatics	Photogrammetry	admission@spbu.ru
87	55°52'19.7	4°17'17.55"	Reino unido	Glasgow	University of glasgow	Ciencias geográficas y de la tierra se clasifica	Pgt tecnologia de geoinformacion y cartografia	Modelamiento topográfico y seguimiento del pais	ges-enquiries@glasgow.ac.uk
88	50°44'14.1	3°32'06.40"	Reino unido	Exeter	University of exeter	Ingeniería Minera	Topografía y gestion ambiental	Gis para topógrafos	+44 (0) 1326 371801
89	50°53'35.7	1°23'43.03"	Reino unido	Southampton	University of southampton	Geografía y ciencias ambientales	Sistemas de informacion geografica	Técnicas y aplicaciones de análisis de datos topográficos	+44 (0) 23 8059 5000
90	54°58'45.0	1°36'52.96"	Reino unido	Newcastle	Newcastle University	Departamento de ingeniería	Geomática	Ingeniería civil	+44 (0) 191208 6445
91	55°52'19.7	4°17'17.55"	Reino unido	Glasgow	University of glasgow	Ciencias geográficas y de la tierra se clasifica	Ms geomatica y gestion	Visualización y uso del mapa	ges-enquiries@glasgow.ac.uk
92	53°57'27.64	18°27'40.31"	Sudáfrica	Ciudad del Cabo	Universidad de ciudad del cabo	Facultad de arquitectura, planificación y geomática	Licenciatura en ciencias en geomática y topografía	Geomática i,ii,iii,iv,v	junifa.abrahams@uct.ac.za
93	0°19'44.72	32°34'15.86"	Uganda	Kampala	Universidad de makerere	Facultad de ingeniería, diseño, arte y tecnología	Licenciatura en ciencias en topografía y geomática	Teledetección y fotogrametría	pr@cedat.mak.ac.ug
94	17°46'56.67	31° 3'16.74"	Zimbabue	Harare	Universidad de zimbabue	Facultad de ingeniería	Licenciatura en geoinformática y topografía	Teledetección y fotogrametría	bukalt@eng.uz.ac.zw
95	24°39'38.30	25°55'51.50"	Botsuana	Gaborone	Universidad de botsuana	Facultad de ingeniería y tecnología	Licenciatura en geomática	Teledetección,elementos de fotogrametría,fotogrametría	geomatics@ub.bw
96	32°00'22"	115°53'36"	Australia	Bentley	Curtin university	Science and engineering	Bachelor of surveying	Photogrammetry	international@curtin.edu.au
97	45°51'56"	170°30'50"	Nueva Zelanda	Dunedin	University of Otago	Division of Sciences	Bachelor of surveying	Introduction to remote sensing technologies	surveying@otago.ac.nz
98	34°55'29.4	138°35'44.3	Australia	South Australia	University of south Australia	Division of information technology, engineering and the environment	Bachelor of engineering (honorus surveying)	Spatial data acquisition and analysis	study.unisa.edu.au
99	43°31'24"	172°34'55"	Nueva Zelanda	Christchurch	University of Canterbury	College of Science	Geographic information science	Cartography and geovisualisation	info@canterbury.ac.nz
100	27°27'58"	58°47'4"	Argentina	Corrientes	Universidad nacional del nordeste	Ciencias exactas, naturales y agrimensura	Ingeniería en agrimensura	Ingeniería en agrimensura	agrimensura@exa.unne.edu.ar
101	34°37'3"	58°22'4"	Argentina	Buenos aires	Universidad de buenos aires	Ingeniería	Ingeniería en agrimensura	Ingeniería en agrimensura	agrimen@fi.uba.ar
102	16°30'26"	68°7'36"	Bolivia	La paz	Universidad mayor de san Andrés	Tecnología	Geodesia,topografía y geomática	Geodesia,topografía y geomática	dtic@umsa.bo
103	16°32'22"	68°5'43"	Bolivia	La paz	Universidad Loyola	Tecnología	Ingeniería de topografía y geodesia	Ingeniería de topografía y geodesia	topografia@loyols.edu.co
104	19°56'51"	43°59'50"	Brasil	Belo horizon	Feamig-faculdade de Engenharia de Minas Gerais	Ingeniería de agrimensura	Ingeniería de agrimensura	Ingeniería de agrimensura	feamingeo@feaming.br
105	46°49'47"	71°13'39"	Canadá	Quebec	Cégep Limoulu	Campus de Quebec	Tecnología geomática,información y cartografía geoespacial	Tecnología geomática,información y cartografía geoespacial	cartographie@cegepimoulu.ca
106	33°26'54"	70°39'30"	Chile	Santiago de Chile	Universidad tecnológica metropolitana	Ingeniería	Ingeniería en geomensura	Ingeniería en geomensura	geomensura@fing.utem.cl
107	37°28'18"	72°20'45"	Chile	Concepción	Universidad de concepción	Campus los Angeles	Ingeniería geomática	Ingeniería geomática	udarae@udec.cl
108	46°02'57"	14°30'14"	Eslovenia	Liubliana	Universidad de Liubliana	Ingeniería civil y geodesia	Ingeniería de geodesia y geoinformatica	Ingeniería de geodesia y geoinformatica	gemach@uni-lj.si
109	56°39'20"	23°43'58"	Letonia	Jelgava	Universidad de ciencias y tecnologías de la vid	Ingeniería civil y arquitectura	Gestión de tierras y agrimensura	Gestión de tierras y agrimensura	baiba.rivza@ilu.lv
110	56°57'02"	24°06'58"	Letonia	Riga	Universidad de letonia	Geografía y ciencias de la tierra	Geografía	Geografía	geomatics@ilu.lv.
111	56°30'46"	27°19'58"	Letonia	Rezekne	eid@rt.lv	Ingeniería	Arquitectura y construcción	Arquitectura y construcción	eid@rt.lv

Tabla 4 Universidades donde se enseña fotogrametría Digital (3)

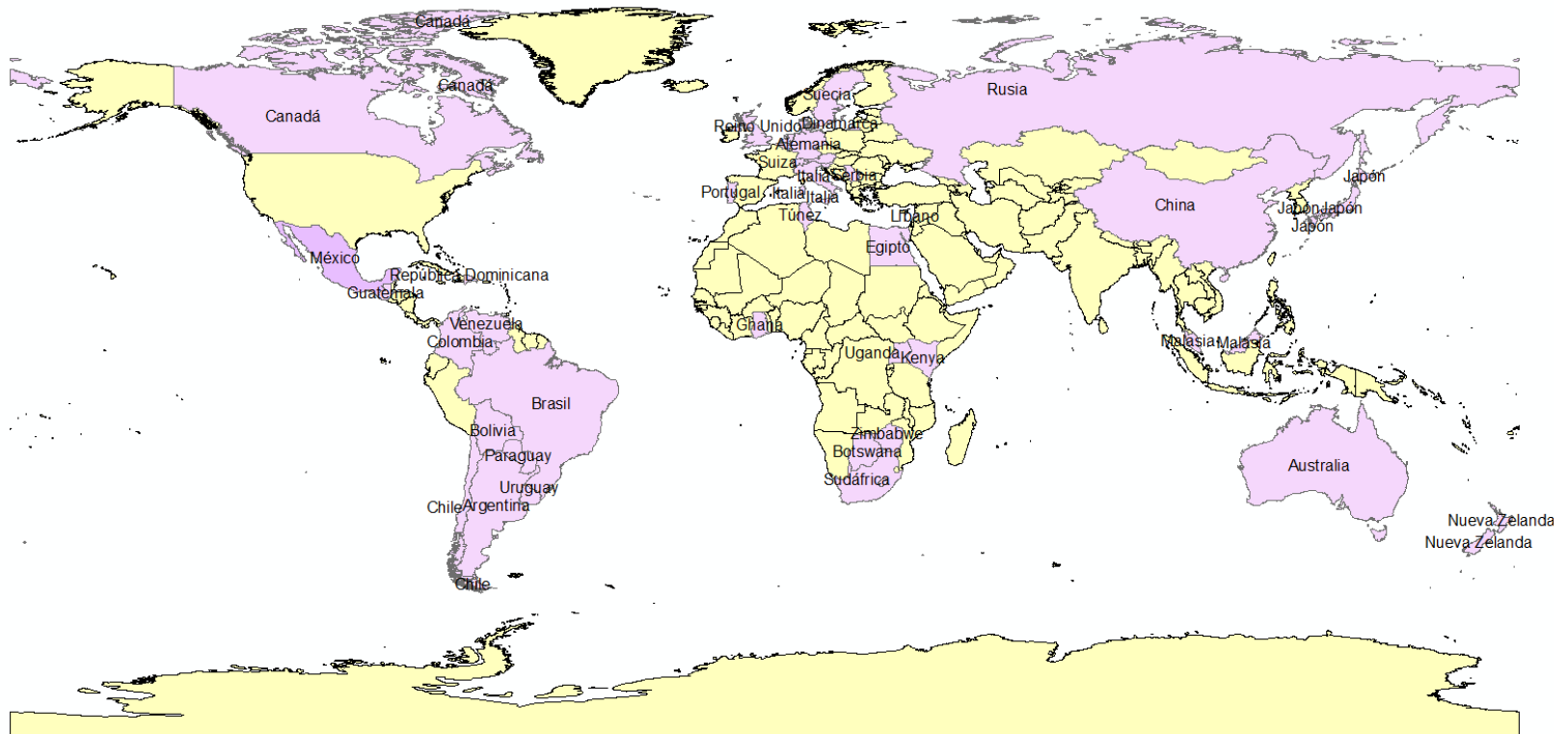


Figura 26 Países a los que pertenece las Universidades de este estudio

PAIS_	CIUDAD	UNIVERSIDAD	FACULTAD
Alemania	Stuttgart	Universidad de ciencias aplicadas de Stuttgart	Ingeniería aeroespacial y geodesia
Japón	Tokio	Instituto de tecnología de Tokio	Ciencias de la tierra y planetarias
China	Hong Kong	La universidad de Hong Kong	Arquitectura
Canadá	Quebec	Cégep Limoilou	Campus de Quebec
Suecia	Estocolmo	Real instituto de tecnología o kungliga tekniska högskolan	Arquitectura y entorno construido
Rusia	San Petersburgo	Universidad federal de Siberia	Ecología y geografías
Nueva Zelanda	Dunedin	University of Otago	Division of Sciences
Australia	Melbourne	Universidad de victoria	Facultad de ingeniería y ciencias
Suiza	Zúrich	Universidad política federal de Zúrich	Ingeniería civil, ambiental y geomática
Italia	Roma	Universidad de roma tor Vergata	Ingeniería
Paises Bajos	Enschede	Universidad de Twente	Departamento de procesamiento de geo información
Brasil	Belo horizonte	Feamig-faculdade de Engenharia de Minas Gerais	Ingenieria de agrimensura
Malasia	Skudai	Universidad Tecnológica de Malaysia	Facultad de medio ambiente construcción y topografía
Egipto	Guiza	Universidad de el Cairo	Escuela de ingeniería
Chile	Santiago de chile	Universidad tecnológica metropolitana	Ingeniería
Botswana	Gaborone	Universidad de botsuana	Facultad de ingeniería y tecnología
Sudáfrica	Johannesburgo	Universidad de Johannesburgo	Centro de investigación e innovación aplicadas en el entorn
Serbia	Lund	Belgrado University	Faculty of environment
Uganda	Kampala	Universidad Makerere	Facultad de Ingeniería, Diseño, Arte y Tecnología (CEDAT)

Tabla 5 Listado de universidades a las cuales se aplicó el instrumento

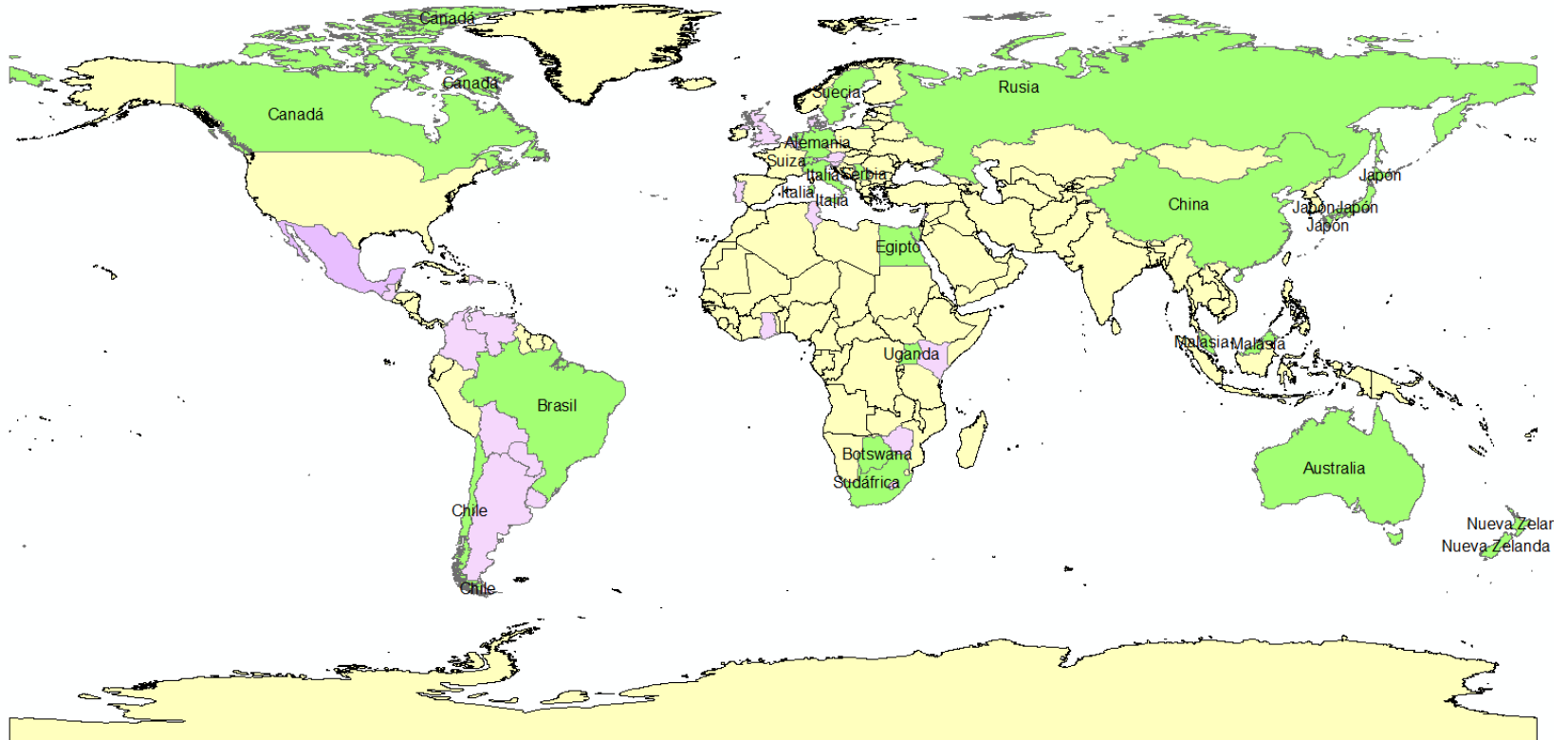


Figura 27 Países de las universidades donde se aplicó el instrumento

3.7. Diseño general.

Se utilizó un diseño estándar con 2 pruebas para todos los estudiantes. La primera prueba consiste en la determinación de los conceptos básicos de geometría encaminados a la identificación de las propiedades, características y la utilización del modelo Van Hiele. La segunda prueba está relacionada con ejercicios básicos de fotogrametría, donde se tiene en cuenta: manejo de escalas, alturas de vuelo, determinación de distancia principal, cálculo de paralaje estereoscópica, cálculo de áreas, entre otras.

3.8. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para el presente estudio se utilizó la técnica de encuesta, utilizando el instrumento de los 2 cuestionarios con el fin de recoger datos certeros y confiables. Se tuvo disponibilidad de los grupos de trabajo por cada una de las universidades, ayudados por el docente que imparte la materia fotogrametría digital. Fue necesario acondicionar los instrumentos al grupo de trabajo aplicado en algunos de estos casos fue necesario aplicarlos en una segunda lengua en nuestro caso inglés.

3.8.1. Descripción de instrumentos

El primer instrumento utilizado consta de 20 preguntas de geometría básica que tienen asociado directo con los niveles de la teoría Van Hiele. La razón fundamental para aplicar este instrumento, es recopilar la información que conduzca a evidenciar cuáles son las principales falencias que tienen los estudiantes para poder ubicar e identificar los diferentes niveles Van Hiele, dar el reconocimiento de cada una de las propiedades a los distintos niveles y dar ubicación en cada una de las fases del modelo Van Hiele; finalmente, determinar qué tan fácil se puede ubicar cada estudiante en las distintas fases.

El segundo instrumento está estrechamente relacionado con la geometría, la matemática y la parte algorítmica de los conceptos fundamentales de la fotogrametría digital. Teniendo como objetivo de aplicación, dar un real contexto de cuál es la ubicación del estudiante en términos fotogramétricos y conocimientos del área específica. Con la aplicación de este instrumento, se pretende evidenciar, si el estudiante tiene la posibilidad de integrar los conceptos geométricos y los desarrollos operacionales que tengan que hacerse en el área específica de la fotogrametría. Al final de la aplicación se puede determinar si el estudiante establece relaciones geométricas y cálculos con fotografías aéreas, cumpliendo tareas básicas de diagramación de líneas de vuelo, cálculo de áreas, volúmenes, medición de distancias

y obtención de valores de paralaje, fundamentalmente. Este instrumento también fue validado por expertos.

Se consideraron 4 expertos internacionales, de 4 continentes distintos, autoridades reconocidas a nivel mundial en el área de la fotogrametría digital.

PhD. Sudhagar Nagarajan, del departamento Civil, Environmental and Geomatics Engineering de Florida Atlantic University, Estados Unidos de América. AMÉRICA

PhD. Karuppasamy Sudalaimuthu PhD. del SRM Institute of Science and Technology: Kattankulathur, Tamil Nadu, en India. ASIA

PhD Nabila I. Abd El Hamed, Remote Sensing and GIS Research Group, Department of Physical, Institut für Physische Geographie, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt main, Alemania. EUROPA

Msc Photogrammetry and Geoinformatics Michael Mutale, Department of Geospatial Sciences and Technology, The Namibia University of Science and Technology en Windhoek, Namibia. AFRICA

3.8.2. Comportamientos en cada nivel de Van Hiele

Para poder tener una idea de los comportamientos en cada nivel de Van Hiele, se sometió a una prueba rigurosa, una teoría debe describir con suficiente detalle y claridad para permitir la elaboración de instrumentos de prueba. Para la teoría de Van Hiele, esto significa que los niveles deben ser identificados con mucha precisión. En consecuencia, a finales de 1979 y principios de 1980, todos los escritos de Van Hiele describían los comportamientos de los alumnos de un determinado nivel, mostrando sus principales características de la siguiente manera:

3.8.2.1. Nivel I (su nivel de base, nivel 0)

"Las figuras se juzgan según su apariencia".

"se reconoce un rectángulo por su forma"

"El rectángulo parece diferente de un cuadrado".

"Cuando se ha mostrado, qué es un rombo, qué es un rectángulo, qué es un cuadrado, qué es un paralelogramo, se es capaz de producir esas figuras sin error en un geoplano, incluso en situaciones difíciles".

"No se reconoce un paralelogramo en un rombo".

"El rombo no es un paralelogramo. El rombo aparece. . . como algo muy diferente".

"Cuando se dice que se llama rombo a un cuadrilátero cuyos cuatro lados son iguales, esta afirmación no será suficiente para convencer al estudiante (se deduce que es su nivel 0) los paralelogramos que él llama cuadrados forman parte del conjunto de los rombos".

En relación al reconocimiento de un cuadrado inclinado como cuadrado, significa que tiene un nivel básico, porque lo puede ver.

3.8.2.2. Nivel 2 (Primer nivel)

Se es capaz de asociar el nombre "triángulo isósceles" con un triángulo concreto, sabiendo que dos de sus lados son iguales, y sacar la consiguiente conclusión de que los dos ángulos correspondientes son iguales"

". un alumno que conozca las propiedades del rombo y pueda nombrarlas también tendrá una comprensión básica del triángulo isósceles semirrombo".

"Las figuras son los soportes de sus propiedades".

"Que una figura sea un rectángulo significa que tiene cuatro 'ángulos rectos', incluso si la figura no se traza muy cuidadosamente".

"Las figuras se identifican por sus propiedades. (Por ejemplo) Si se dice que la figura trazada en el tablero posee cuatro ángulos rectos, se trata de un rectángulo, aunque la figura no esté cuidadosamente trazada".

"Las propiedades aún no están organizadas de tal manera que un cuadrado se identifique como un rectángulo".

"El estudiante aprende a ver el rombo como un cuadrilátero equilátero con ángulos opuestos idénticos y diagonales interperpendiculares que se bisecan entre sí y a los ángulos".

"Una vez que el estudiante llega a la etapa en la que conoce el rombo y reconoce el triángulo isósceles para un semirrombo, también será capaz de determinar de antemano un cierto número de propiedades del triángulo equilátero (un punto intermedio entre éste y el siguiente nivel)

"Una vez decidido que una estructura es un "triángulo isósceles el estudiante sabrá también que un cierto número de propiedades rectoras deben estar presentes, sin tener que memorizarlas en este caso especial".

"La inversa de una función sigue perteneciendo al primer nivel de pensamiento".

"Semejanza, reglas de probabilidad, potencias, ecuaciones, funciones revelaciones, conjuntos, con estos conceptos se puede pasar de nivel cero al primer nivel"

3.8.2.3. Nivel 3 (su segundo nivel)

Los alumnos pueden comprender lo que se entiende por "prueba" en un segundo nivel de pensamiento.

Puede manipular la interrelación de las características de los patrones geométricos".

"Por ejemplo, si sobre la base de teoremas generales de congruencia, él es capaz de deducir la igualdad de ángulos o segmentos lineales de figuras concretas".

"Las propiedades se ordenan deducidas unas de otras: una propiedad precede a otra propiedad".

"El significado intrínseco de la deducción no es comprendido por el estudiante".

"Se reconoce que el cuadrado es un rectángulo porque en este nivel entran en juego las definiciones de las figuras".

"el estudiante reconocerá el rombo por medio de algunas de sus propiedades, porque, por ejemplo, es un cuadrilátero cuyas diagonales se bisecan perpendicularmente".

" el estudiante no es capaz de entender geometría en el sentido más estricto de la palabra".

"El estudiante sabe razonar de acuerdo con un sistema lógico deductivo"

"la pregunta sobre si la inversa de una función es una función que pertenece al segundo nivel de pensamiento".

"La comprensión de la implicación, la equivalencia, la negación de una implicación, pertenece al segundo nivel de pensamiento".

"Son capaces de comprender estructuras de pensamiento más avanzadas como, por ejemplo: "el paralelismo de las líneas, la presencia de una sierra, y por tanto (según su carácter simbólico) la igualdad de los ángulos interiores

"El estudiante puede aprender una definición de memoria'. Puede entender que las definiciones pueden ser necesarias: segundo nivel".

"Sabe lo que se quiere decir el uso de 'algunos' y 'todos'

3.8.2.4. Nivel 4 (tercer nivel)

"Alcanzará el tercer nivel de pensamiento cuando empiece a manipular las características intrínsecas de las relaciones. Por ejemplo, si puede distinguir entre una proposición y su inversa

"Puede empezar a estudiar un sistema deductivo de proposiciones, es decir, la forma en que se efectúa la interdependencia de las relaciones. Las definiciones y las proposiciones entran ahora en el horizonte intelectual de los alumnos".

"El paralelismo de las líneas implica la igualdad de los correspondientes ángulos y viceversa".

"El alumno será capaz, por ejemplo, de distinguir entre una proposición y su inversa.

"Es posible desarrollar un sistema axiomático de geometría".

"La mente se ocupa del significado de la deducción, de la inversa de un teorema, de un axioma, de las condiciones necesarias y suficientes".

"Se puede decir al estudiante que en una demostración se trata realmente de saber si estas tesis son verdaderas o no, o más bien de la relación entre la verdad de estas tesis y de algunas otras. Sin su comprensión tales relaciones no se pueden explicar al alumno que se tiene que recurrir a los axiomas".

3.8.2.5. Nivel 5 (Cuarto nivel)

"Un estudio comparativo de los diversos sistemas deductivos dentro del campo de las relaciones geométricas está reservado para aquellos que han alcanzado el cuarto nivel."

"Por último, en el cuarto nivel, el pensamiento lógico puede convertirse en una materia".

"La propia axiomática pertenece al cuarto nivel".

"No se plantea preguntas como: ¿qué son los puntos, las líneas superficies, etc. Las figuras se definen sólo por símbolos conectados por relaciones. Para encontrar el significado específico de los símbolos, hay que dirigirse a los niveles inferiores donde se puede ver el significado específico de estos símbolos".

Hay una escasez de comportamientos en el nivel 5, e incluso esos cuatro comportamientos enumerados son bastante vagos. Por ejemplo, el segundo

comportamiento enumerado menciona el "pensamiento lógico propiamente dicho" como materia. Una persona podría interpretar que esta afirmación se refiere a la axiomática (como sugiere el tercer comportamiento enumerado) o a la lógica simbólica (que más común en las aulas). En el nivel 4 se describen diversos comportamientos, pero las descripciones son a menudo vagas. Por ejemplo, el sexto comportamiento de ese nivel depende del significado de las palabras "ocupado" y "significado". Aunque un profesor puede, en el curso de un año típico de estudio de geometría, puede identificar una serie de afirmaciones de los alumnos que parecen ejemplificar este comportamiento, una situación que ponga a prueba si la ocupación o la significación podría ser exhibida no es inmediatamente aparente. En los niveles 1, 2 y 3 los comportamientos son en cantidad suficiente y detallados como para permitir su comprobación. Por tanto, se concluye que los principios de Van Hiele son fácilmente comprobables en los tres primeros niveles y que, con un poco de esfuerzo, el nivel 4 podría probarse, pero que el nivel 5 es dudoso. Esto no disuade de construir una prueba que cubra los cinco niveles, pero se hace sabiendo que el desacuerdo con preguntas del nivel 5 es probable, y que todas las conclusiones relativas al nivel 5 están sujetas a esta advertencia.

3.8.3. Prueba de acceso a la geometría del estudiante

Esta prueba es presentada como ANEXO 1 a este documento, se presenta la prueba establecida y aplicada en esta investigación:

Esta prueba contribuye a extraer información para el cumplimiento del objetivo 1:

“Reconocer los elementos del modelo de Van Hiele aplicados a la enseñanza de la fotogrametría, que contribuyan al mejoramiento del desempeño académico, para estudiantes de fotogrametría digital avanzada.”

Prueba de conocimiento de elementos fotogramétricos

El segundo instrumento aplicado busca principalmente con una agrupación de preguntas establecer las relaciones entre los siguientes temas:

Conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas Verticales

Identificación y tratamiento de parámetros de sensores

Utilización de relaciones Matemáticas básicas

Cálculos de distancias y desplazamientos en fotos Aéreas

Correcciones Geométricas en Fotografías aéreas verticales

Parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos

Esta prueba contribuye al cumplimiento del objetivo 2, del trabajo de investigación.
Esta prueba es presentada como ANEXO 2 a este documento

“Caracterizar los procesos de aprendizaje que estén asociados al mejoramiento de la obtención de precisiones, para realizar mediciones en fotografías aéreas verticales, por parte de estudiantes de fotogrametría digital avanzada”.

Este cuestionario está referido a preguntas correspondientes a conceptos

fotogramétricos, que son el eslabón principal para ser relacionados con la teoría Van Hiele. En este desarrollo se abordan conceptos relacionados con: elevación del terreno y altura de vuelo del sensor, escala, desplazamiento debido al relieve, cálculo de pendiente, paralaje, entre otras. El texto contiene 30 preguntas, con única respuesta, en donde además se muestra la solución. Se busca saber cómo está el conocimiento de los estudiantes para tener soporte en la generación de la propuesta didáctica

CAPÍTULO IV

4. Resultados

A continuación, se presenta una descripción de los resultados obtenidos durante la investigación. En primer término, se realiza una visión de los datos estadísticos a través de análisis de componentes principales, permitiendo la presentación de la influencia de las variables en el estudio. Principalmente esta soportado en dos instrumentos: Uno que identifica el nivel de conocimiento en geometría de los estudiantes, asociado a los niveles del modelo Van Hielén y el otro relacionado con preguntas técnicas del área de la fotogrametría. En segundo término, se presenta una descripción del desempeño en cada una de las pruebas, de acuerdo a la universidad donde se realizó la aplicación. Paralelamente, haciendo uso de los sistemas de información geográfica, se visualiza gráficamente a través de mapas, cuáles son las ubicaciones de las universidades y se hace un análisis de componentes, comparando las principales variables del primer y segundo constructo, junto con la relación entre ellas.

4.1. Interpretación y discusión de resultados

4.1.1. Análisis de Componentes Principales - ACP

Para el análisis de los datos estadísticos se utilizó la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales - ACP, o conocida en inglés como Principal component analysis PCA y fue trabajada en el software de carácter libre R.

Esta técnica fue seleccionada porque permite la presentación de nuevas variables para un conjunto de datos que se recopilaron a través del instrumento, esas variables denominadas componentes, se esperaba que esos componentes no presentaban mucha correlación entre ellas en virtud a que, teóricamente los estudiantes de fotogrametría digital avanzada, tienen conocimientos similares en la parte de estereofotogrametría.

La idea original es poder hacer que ese conjunto de datos se describa como nuevas variables, pero que exista al mismo tiempo una reducción de esas mismas variables, con el objetivo de que tengan más facilidad en su estudio.

Lo anterior soportado en que el primer instrumento tiene 20 preguntas que identifican

el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes, en geometría básica y está asociado a los niveles del modelo Van Hiele. Se tiene en cuenta que ese conocimiento está dado en los niveles propios de la teoría de estudio, es decir, Nivel 0 visualización o reconocimiento, *Nivel 1 análisis*, *Nivel 2 ordenación o clasificación*, *Nivel 3 deducción formal*, *Nivel 4 rigor*. Simultáneamente, se evaluó el nivel de conocimiento de elementos fotogramétricos de la población del de estudio, integrándolos fundamentalmente en 30 preguntas, que fueron asociadas, para obtener 6 variables, de la siguiente manera:

- Conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas Verticales
- Identificación y tratamiento de parámetros de sensores
- Utilización de relaciones Matemáticas básicas
- Cálculos de distancias y desplazamientos en fotos Aéreas
- Correcciones Geométricas en Fotografías aéreas verticales
- Parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos

4.1.2. Método factorial

El modelo utilizado (Análisis de Componentes Principales - ACP) se considera un como un método factorial que está dentro del conjunto de técnicas multivariantes que brinda la posibilidad de la reducción del problema estadístico, sintetizando un gran conjunto de datos y permitiendo la creación de nuevas variables que son función lineal de las variables originales, teniendo como resultado que la reducción de la dimensión del conjunto de variables se traduzca en un conjunto de menor número de variables y así poder mejorar la interpretabilidad de los datos.

La razón principal de haber seleccionado este modelo de análisis de componentes principales estada aquí la información de la muestra de datos tiene confiabilidad precisamente por tomar un número alto de variables. Lo que trae como consecuencia que se tengan demasiados coeficientes de correlación y por ende tener una mayor dificultad para la visualización de correlación de variables, pero por otro lado una confiabilidad en el análisis de la información precisamente por haber tomado un número alto de variables.

Como la información fue tomada a un grupo disciplinar con niveles de conocimiento en un área específica se puede evidenciar que existe una fuerte correlación entre las respuestas entregadas, lo cual pudiera significar que algunas de esas variables pueden llegar a medir aspectos similares, justamente el modelo utilizado (Análisis de

Componentes Principales - ACP) contribuye a simplificar estadísticamente el estudio y poder hacer un análisis más productivo de los datos recopilados.

4.1.2.1. *Fases utilizadas en este estudio estadístico*

Las fases utilizadas en este estudio estadístico tienen que ver con el análisis de la matriz de correlaciones en virtud aquí este análisis de componentes principales únicamente se puede utilizar si existen altas correlaciones entre las variables y se tiene una alta correlación entre las variables implicando la existencia de información redundante.

En segundo término, se realizó la selección de factores en donde el primer factor explica la mayor cantidad de variabilidad el segundo factor explica la máxima variabilidad posible, no explicada por el primer factor y así de manera consecutiva, elemento propicio en el estudio, especialmente cuando se trata de los análisis de los niveles del modelo Van Hiele, dado que ellos son consecutivos; en el análisis estadístico a esta serie de factores se les va a denominar los componentes principales.

La tercera fase es el análisis de la matriz factorial, en donde una vez seleccionados los componentes principales se da una representación en forma de matriz, en donde cada elemento es el coeficiente factorial de las variables, las correlaciones entre las variables y los componentes principales. Esta matriz tendrá la representación de columnas como los componentes principales, para nuestro caso los diferentes niveles del modelo Van Hiele y el conocimiento fotogramétrico de las pruebas aplicadas y las filas las variables tenidas en cuenta, en nuestro caso, cada una de las universidades a la cual se aplicó la prueba, como se observa en la tabla 7:

nivel_0	nivel_1	nivel_2	nivel_3	nivel_4	att_1	att_2	att_3	att_4	att_5	att_6
4.52105729	4.65076731	3.6283213	3.57890439	5.22335659	4.94111613	4.21790393	4.33968755	2.90331436	2.76827088	2.15942866
4.35245931	4.27011887	3.46036219	3.48822655	5.08733982	4.54228197	3.59255521	3.75649191	2.84851852	2.74711661	2.50320812
4.18451691	3.97828144	3.19127175	3.08447636	4.48171454	3.01223686	4.49451971	3.49986872	2.8136457	2.63942539	2.35363473
4.10349752	3.76841388	3.07670351	2.98566976	4.33350464	2.95550397	3.52132755	3.89449748	2.77215527	2.74642694	2.14826233
4.08780051	4.04124016	3.26471437	3.25976868	4.74465302	3.78704182	4.7126413	2.26566118	2.82629953	2.83209681	2.46667048
4.08360351	3.77482713	3.16666827	3.22601399	4.69402099	3.81728717	2.67089547	3.72467062	2.87009264	2.46162807	2.49195624
4.07223766	4.15602324	3.27781663	3.25363219	4.73544828	4.07013677	4.50672291	3.07938367	2.66265878	2.45082408	2.27471939
4.00663944	3.90130642	3.18111157	3.21896277	4.68344415	4.2295739	3.09185674	3.42332968	2.55554298	2.70300604	2.20409598
3.98627503	3.58723903	2.96179846	2.88231261	4.17846892	2.51972363	3.47582142	3.76988164	2.8738011	2.36970726	2.26777729
3.96847941	4.06519603	3.21073268	3.19011621	4.64017431	3.91834308	4.71769071	2.55112445	2.76439706	2.46717732	2.19305841
3.9584149	3.66036096	3.14167713	3.300694	4.806041	4.35833142	2.06226826	3.16844992	2.70838864	2.62258199	2.58654855
3.9464323	3.74714401	3.16888024	3.32219358	4.83829038	4.78121777	1.77916798	3.39048945	3.00307375	2.65533175	2.08869572
3.9379859	3.59393046	3.09783911	3.21865241	4.68297862	3.64940894	3.12229255	2.23633328	2.88013288	2.69558709	2.7920898
3.91553517	3.74093896	3.02705997	2.96607528	4.30411292	3.19559197	3.967454	2.89407291	2.81672171	2.76864012	1.97273664
3.83444103	3.89252238	3.07636189	3.03970153	4.41455229	3.84563612	4.11994718	2.69826489	2.85515706	2.61577837	1.69735454
3.79759061	3.86903535	3.03202565	2.95006721	4.28010082	3.11800708	5.32236627	2.02072434	2.88158528	2.38231872	1.99990275
3.79194673	3.9881814	3.06606707	2.97827003	4.32240505	3.65180633	4.90550889	2.6288078	2.80382382	2.34010025	1.62951101
3.71218347	3.47387188	2.93838716	3.06248861	4.44873292	4.15768184	1.65649516	3.51675128	2.69984528	2.31593589	2.02022987
3.70237204	3.46852003	2.83739613	2.7963486	4.0495229	3.02198118	3.16784651	3.11522886	2.80856984	2.52040074	1.72102693

Tabla 6 Resultados de las pruebas aplicadas en universidades

La cuarta fase corresponde a la interpretación de los factores para que un factor sea fácilmente interpretable debe tener coeficientes factoriales lo más cercanos a 1 O A menos 1. Y no deben existir factores con coeficientes factoriales similares.

4.1.2.2. categorización de desempeño en las universidades

La categorización de desempeño en las universidades se puede visualizar en la Tabla 8, en donde hay una diferencia para las universidades de los denominados países desarrollados, donde la encabezan: Alemania, Japón, China y Canadá. Por otra parte, existe una desventaja para los países con un desarrollo económico más bajo, teniendo en la lista de menor desempeño a mayor desempeño Uganda, Serbia, Sudáfrica y Botsuana.

PAIS	CIUDAD	UNIVERSIDAD	FACULTAD	DEPENDENCIA
Alemania	Stuttgart	Universidad de ciencias aplicadas de Stuttgart	Ingeniería aeroespacial y geodesia	Ingeniería geomática
Japón	Tokio	Instituto de tecnología de Tokio	Ciencias de la tierra y planetarias	Departamento de ciencias de la información
China	Hong Kong	La universidad de Hong Kong	Arquitectura	Departamento de arquitectura e ingeniería civil
Canadá	Quebec	Cégep Limoilou	Campus de Quebec	Tecnología geomática, información y cartografía geoespa
Suecia	Estocolmo	Real instituto de tecnología o kungliga tekniska högskolan	Arquitectura y entorno construido	Maestría en ciencias
Rusia	San Petersburgo	Universidad federal de Siberia	Ecología y geografías	Departamento de geografía
Nueva Zelanda	Dunedin	University of Otago	Division of Sciences	Bachelor of surveying
Australia	Melbourne	Universidad de victoria	Facultad de ingeniería y ciencias	Entorno construido
Suiza	Zúrich	Universidad política federal de Zúrich	Ingeniería civil, ambiental y geomática	Ingeniería civil, ambiental y geomática
Italia	Roma	Universidad de roma tor Vergata	Ingeniería	Ingeniería civil y informática
Países Bajos	Enschede	Universidad de Twente	Departamento de procesamiento de geo informac	Departamento de procesamiento de geoinformación
Brasil	Belo horizonte	Feamig-faculdade de Engenharia de Minas Gerais	Ingeniería de agrimensura	Ingeniería de agrimensura
Malasia	Skudai	Universidad Tecnológica de Malaysia	Facultad de medio ambiente construcción y topogr	Departamento de arquitectura
Egipto	Guiza	Universidad de el Cairo	Escuela de ingeniería	Escuela de ciencias aeroespaciales
Chile	Santiago de Chile	Universidad tecnológica metropolitana	Ingeniería	Ingeniería en geomensura
Botswana	Gaborone	Universidad de botsuana	Facultad de ingeniería y tecnología	Licenciatura en geomática
Sudáfrica	Johannesburgo	Universidad de Johannesburgo	Centro de investigación e innovación aplicadas en	Departamento de administración de la construcción
Serbia	Lund	Belgrado University	Faculty of environment	Geographic information technology
Uganda	Kampala	Universidad Makerere	Facultad de Ingeniería, Diseño, Arte y Tecnología	Departamento de geomática y ordenación del territorio

Tabla 7 Desempeño en las universidades según la prueba aplicada

4.1.3. Interpretación de resultados con sistemas de Información Geográfica

Dando utilidad a los sistemas de información geográfica se puede visualizar y corroborar estos resultados, donde de manera espacial se presentan en la fig. 28., donde los países con mejor desempeño corresponden a los colores en una escala que empieza por el color rojo, pasando por el anaranjado y terminando en el amarillo. Es de anotar que los países que se encuentran en el hemisferio norte, empezando por Alemania, a excepción de Australia y Nueva Zelanda tienen unos desempeños en las pruebas aplicadas con resultado sobresaliente. Justamente los territorios que se encuentran en el hemisferio sur, principalmente en América del Sur y África, tienen un desempeño inferior. Haciendo notar que también en Europa, Serbia se tiene también un desempeño con un rendimiento bajo.

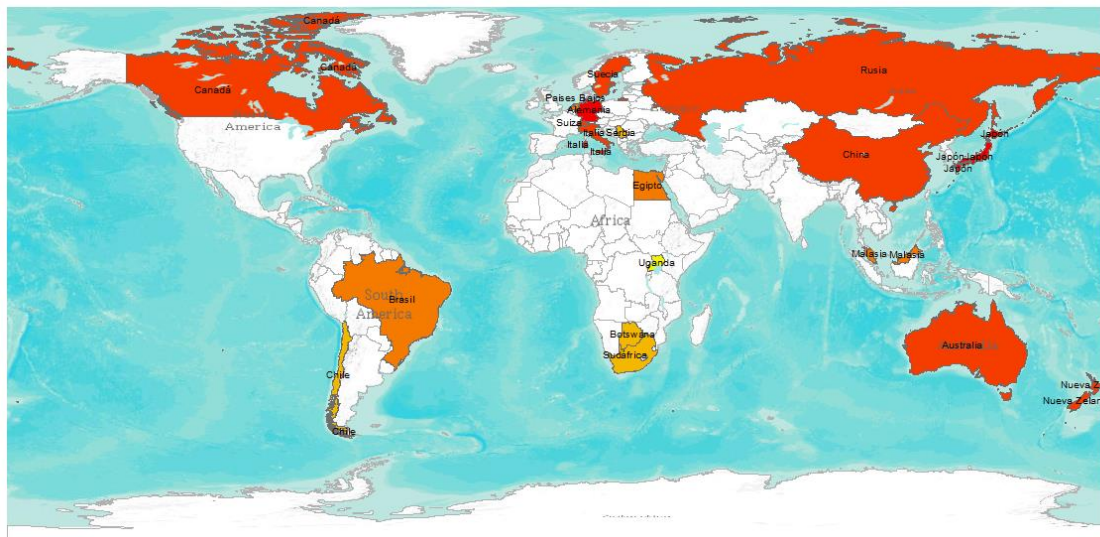


Figura 28 visualización espacial de desempeño, según prueba aplicada

La visualización de los resultados de manera integral, se puede evidenciar en un gráfico de análisis de componentes principales (fig.29) En donde se presentan las variables de manera integral, referenciadas para los 5 niveles del modelo de Van Hiele y las variables relacionadas en la aplicación de la prueba de conocimientos de fotogrametría. Con una anotación de nivel cero hasta el nivel cuatro y una notación de a Att 1 hasta Att 5, respectivamente. Por ser este modelo de análisis factorial y teniendo en cuenta que todos los vectores apuntan hacia la derecha, se puede considerar un componente indicador de desempeño, el cual ha sido calculado y explicado anteriormente en la notación de tabla y de manera espacial.

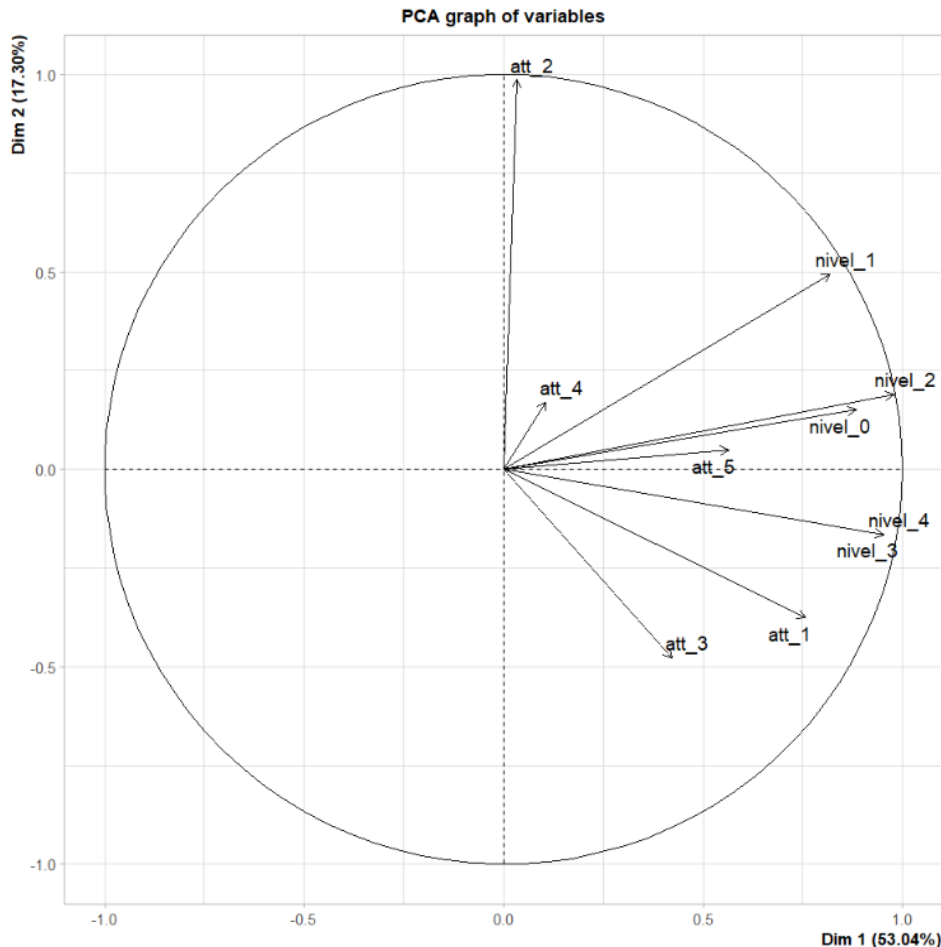


Figura 29 Gráfico análisis de componentes principales - ACP

Las principales características desde gráfico de análisis de componentes principales está enmarcada en que los ejes son los componentes principales del análisis estadístico realizado teniendo así que el X contiene el 53.04% de la información original, y el eje Y contiene el 17.30% de la información original. Dentro de las características generales de este gráfico se tiene en cuenta que sí se quiere comparar dos variables y el ángulo forma 90 grados no existe correlación entre las variables, la longitud de las flechas indica, que tan bien está representada está una variable, es decir, entre más cerca se encuentre al valor de 1 (Circulo de correlaciones), mejor representada está. Adicionalmente las variables que se ubican cerca del centro, significan que no están representados bien, dentro del plano cartesiano. Otra característica fundamental en la interpretación es que, si el ángulo es pequeño entre la representación de variables, la correlación es positiva y mayor y si el ángulo tiende

a 180 grados la correlación es contraria.

En respuesta al objetivo de investigación específico, en donde se define el reconocimiento de los elementos del modelo Van Hiele, aplicados a la enseñanza de la fotogrametría que contribuyan al mejoramiento del desempeño académico para estudiantes de fotogrametría digital avanzada, se colegir que existe un alto nivel de correlación entre el nivel de rigor y el nivel de educación formal en el modelo Van Hiele, en razón a que se encuentran prácticamente los dos vectores en la misma dirección y magnitud. En este mismo sentido, el nivel 0, de visualización o reconocimiento, tiene una alta correlación con el nivel 2, de ordenación o clasificación; dado que, en un segundo plano, el nivel 1, (análisis) tiene correlación con el nivel 2, (ordenación o clasificación) y el nivel 0 (visualización o reconocimiento). La correlación anteriormente descrita, es similar a la dada entre el nivel 4 (rigor) junto con el nivel 3 (deducción formal) y los niveles 0 y 2, (visualización o reconocimiento y ordenación o clasificación), respectivamente.

En cuanto a la correlación más diferenciada entre los niveles, corresponde al grupo integrado por el nivel 4 y 3, es decir, rigor y deducción formal, versus, el nivel 1 (análisis) que forman un ángulo aproximado de 60° , siendo así, la aproximación más cercana a 90° , donde no existe correlación entre las variables.

Por otra parte, en respuesta a la contribución del objetivo específico de caracterización de los procesos de aprendizaje asociados al mejoramiento de obtención de precisiones para realizar mediciones en fotografías aéreas verticales, por parte de estudiantes de fotogrametría digital avanzada, el análisis arrojado por la prueba relacionada con los conocimientos de fotogrametría, se puede inferir que la mayor correlación está dada entre los atributos 1 y 3, correspondiendo a la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales y la utilización de relaciones matemáticas en fotogrametría; teniendo mucha razón en la práctica, dado que si esos conceptos básicos están bien fundamentados, se puede hacer utilización adecuada de las relaciones matemáticas.

De igual manera, se puede visualizar una correlación significativa entre el atributo 2, es decir la identificación y tratamiento de parámetros de sensores, con el atributo 4, que corresponde a los cálculos de distancias y desplazamientos en fotos aéreas. Vale la pena destacar que el atributo 4, relacionado con cálculos de distancias, tiene un valor muy pequeño (aproximadamente 0.3) dando así una indicación de que la variable no está totalmente representada.

Existe una correlación equiparable entre el atributo 5, es decir, las correcciones geométricas en fotografías aéreas verticales y el atributo 1, donde se conceptualizan

los datos básicos de las fotografías aéreas verticales, siendo similar al que se tiene desde el atributo 5, al atributo 4, relacionado con cálculos de distancias y desplazamientos de fotos aéreas. Es importante mencionar que ese atributo 5, no tiene una representación total, en razón a que la longitud de la flecha tiene una representación de aproximadamente 0.6, en una escala de 0 a 1, lo cual hace que no esté altamente representada la variable.

4.1.4. Análisis de componentes Georreferenciados

4.1.4.1. Análisis de resultados de pruebas relacionadas con el modelo de Van Hiele

A continuación, se presenta un análisis general entre los niveles del modelo de Van Hiele, que permite generar una idea de Cuál es el nivel en conocimientos relacionados a geometría básica. Generando un aporte al objetivo específico referido al reconocimiento de los elementos del modelo, aplicados a la enseñanza de la fotogrametría, que a su vez puedan contribuir al mejoramiento del desempeño académico para estudiantes de fotogrametría digital avanzada. Se establece una comparación entre los 5 niveles del modelo de Van Hiele; teniendo en cuenta el nivel 0 visualización o reconocimiento, el nivel 1 análisis, el nivel 2 ordenación o clasificación, el nivel 3 deducción formal y el nivel 4 rigor. De manera contrastante, se establecen relaciones entre algunos niveles, con el fin de dar posibles explicaciones a la influencia del desempeño en cada uno de estos niveles, para dar aporte al objetivo específico.

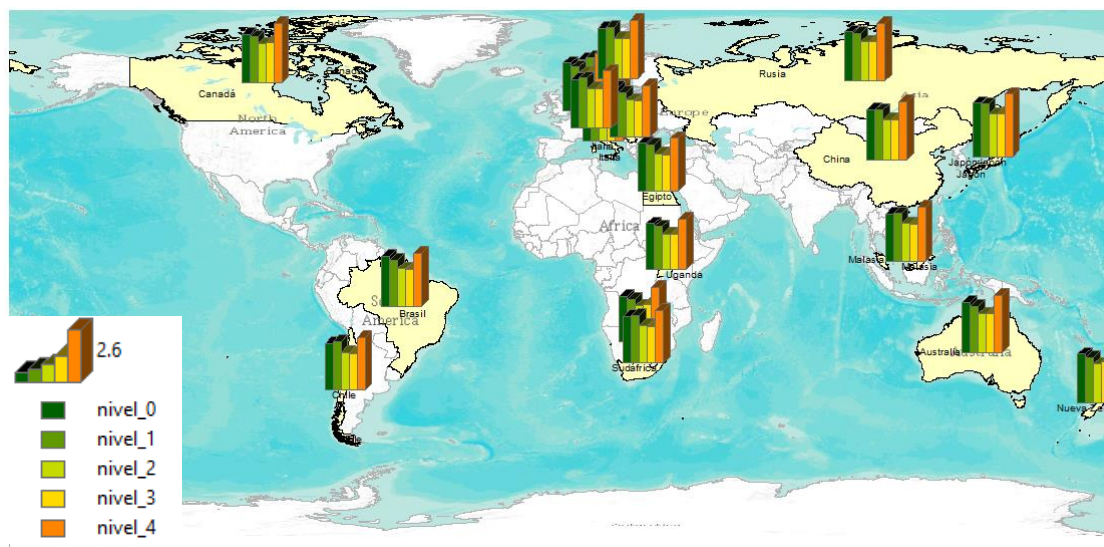


Figura 30 Análisis general de relación entre los niveles del modelo de Van Hiele

Si se realiza una comparación de los niveles Van Hiele se puede determinar que en todas las universidades donde se aplicó la prueba, el quinto nivel es decir el de rigor, presenta una alta determinación en lo que respecta a respuestas efectivas. En contraste el nivel 2 y 3, es decir, ordenación o clasificación y deducción formal, respectivamente, tienen un nivel de respuesta similar y las respuestas para los niveles 0 y 1, son relativamente equiparables; indica esto, que todos los estudiantes que presentaron la prueba tienen un nivel de visualización o reconocimiento similar al nivel Van Hiele asociado al análisis. En el mapa se aprecia que, en promedio, la

respuesta acertada a las diferentes preguntas de los niveles en general, presentan uniformidad, en relación a las respuestas verdaderas dadas por todos los participantes.

Generalizando, se puede visualizar en las universidades que se encuentran en los países de mejores desempeños, tienen un fuerte componente en el nivel de rigor, del modelo Van Hele. Permitiendo inferir que los fundamentos en geometría soportados por algoritmos matemáticos, pueden llegar a intervenir en que se tenga mejores resultados para el estudio fotogramétrico.

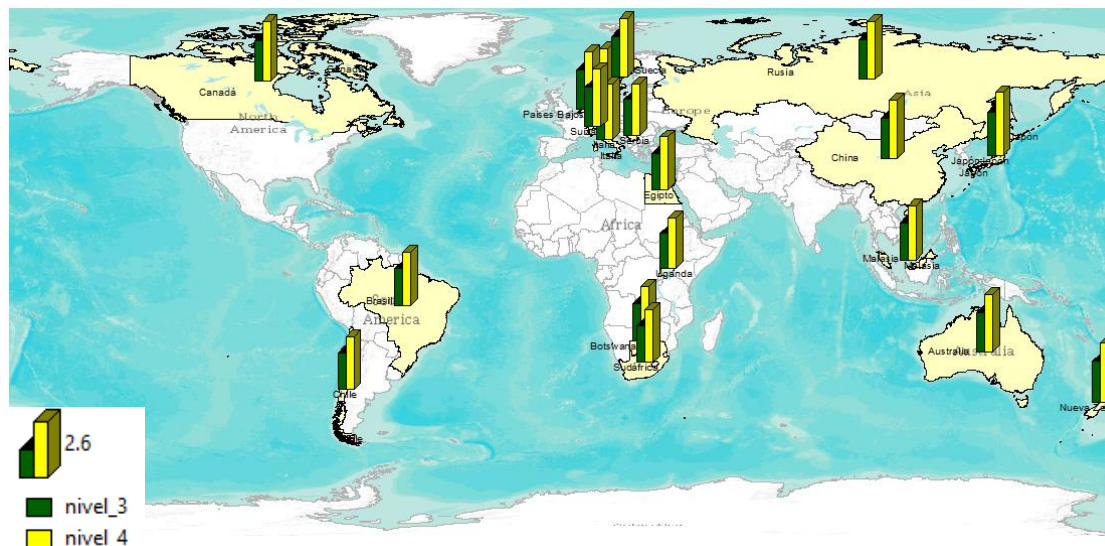


Figura 31 Análisis de relación entre los niveles 3 y 4 del modelo de Van Hiele

Comparando el nivel 4 de van Hiele, es decir el nivel de rigor y el nivel 3 (deducción formal), existe un común denominador, para todos los países el nivel de rigor es muy superior en comparación al de deducción formal, esto significa que puede haber una comprensión de la parte matemática en mayor medida, en comparación a la deductiva

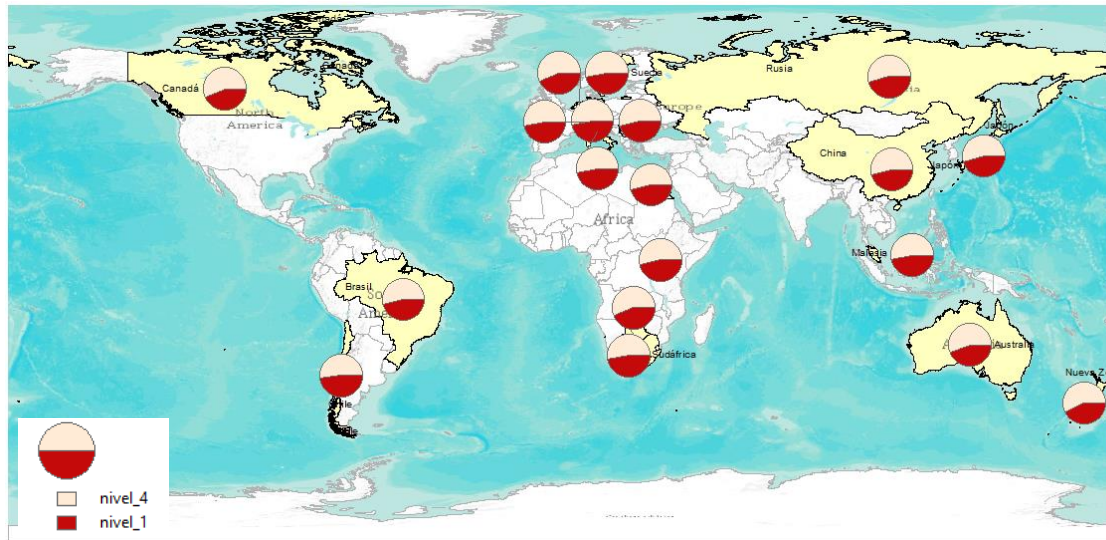


Figura 32 Análisis de relación entre los niveles 1 y 4 del modelo de Van Hiele

Sí se puede hacer una relación entre el nivel 4 de la teoría Van Hiele, es decir el nivel de rigor, y el nivel de análisis. Se puede identificar que existe una relativa proporcionalidad en el desempeño de la presentación de las pruebas en casi todas las universidades estudiadas. Realizando una excepción en las universidades pertenecientes a los países con mejor desempeño. Esto significa que los estudiantes pueden hacer un análisis geométrico básico y permite tener la conceptualización de los elementos teóricos para posteriormente llegar a realizar un soporte teórico de algoritmos, que sea significativo y tenga el debido rigor.

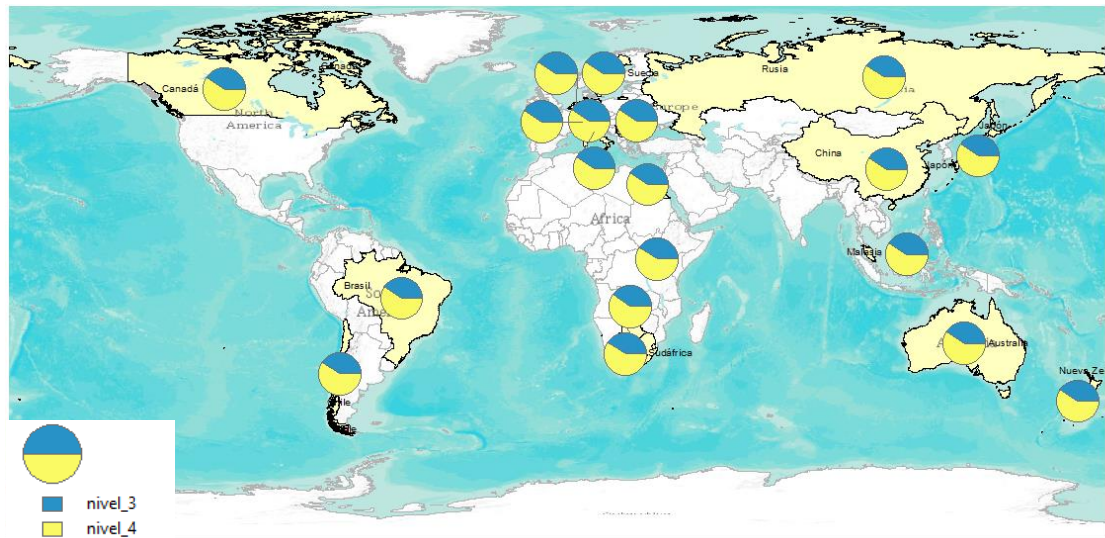


Figura 33 Análisis de relación entre los niveles 3 y 4 del modelo de Van Hiele

La comparación establecida de los últimos niveles del modelo Van Hiele, es decir el nivel 3, de deducción formal y el nivel 4 de rigor. Se puede colegir, que en todas las universidades de los países en los cuales se aplicó la muestra, el nivel 4 (rigor) presenta un horizonte de acierto sustancialmente mayor, en comparación al nivel de deducción formal. Significado que los estudiantes comprenden la necesidad de rigor y les es posible hacer deducciones abstractas; se resalta que es posible entender la geometría no euclidiana y se les facilita un poco menos, tener claramente definido el significado de la deducción y el papel de los postulados, teoremas y demostraciones.

4.1.5. Análisis de resultados de pruebas relacionadas en conocimiento de fotogrametría

A continuación, se presenta un análisis general entre los conceptos relacionados con el conocimiento de fotogrametría, aplicados en las diferentes universidades objeto de este estudio. Permitiendo generar una idea de cuál es el nivel de conocimientos relacionado con las áreas, aportando así, en el objetivo específico de esta investigación, referente a caracterización de los procesos de aprendizaje asociados al mejoramiento de obtención de precisiones para realizar mediciones en fotografías aéreas verticales por parte de estudiantes de Fotogrametría digital avanzada. Relacionados fundamentalmente en 30 preguntas, que fueron asociadas, para obtener 6 variables, de la siguiente manera:

Conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas Verticales

Identificación y tratamiento de parámetros de sensores

Utilización de relaciones Matemáticas básicas

Cálculos de distancias y desplazamientos en fotos Aéreas

Correcciones Geométricas en Fotografías aéreas verticales

Parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos

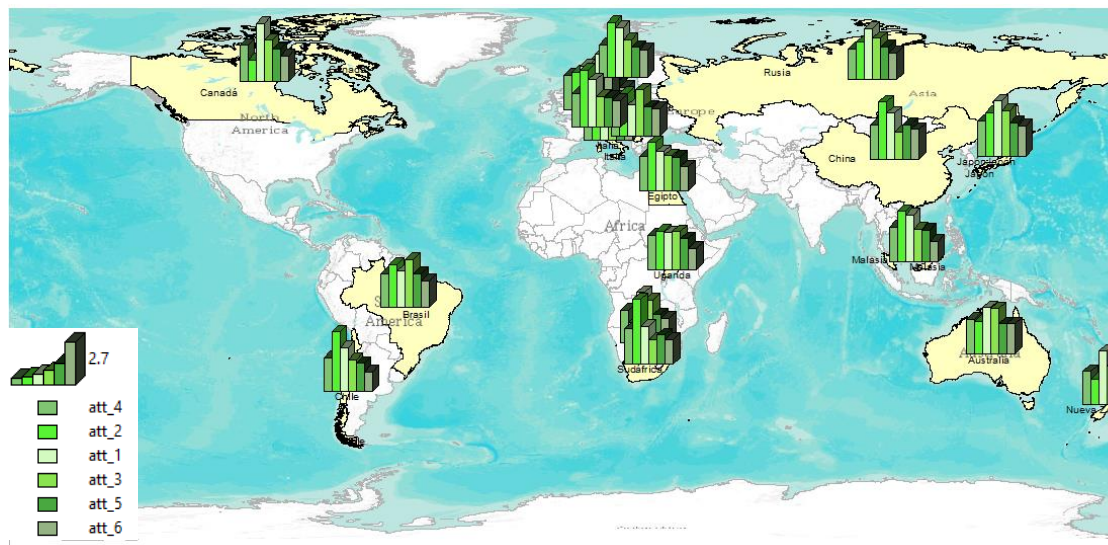


Figura 34. Resultados prueba conocimientos de fotogrametría

La interpretación que se puede dar en conjunto para los estudiantes que presentaron la prueba en cuanto a conocimientos de fotogrametría establece que en general hay diferencia de todos los aspectos, en especial lo referente a aspectos inherentes a la identificación y tratamiento de parámetros de sensores, junto con los cálculos de distancias y desplazamientos en fotos aéreas. Tienen un grado de acierto sobresaliente en países como Canadá, Alemania, Rusia, Australia, Nueva Zelanda,

Japón y China. En contraste en los países de África y Suramérica a excepción de Chile, la tendencia es que esos dos atributos tengan prácticamente el mismo acierto de respuesta que los demás.

Particularmente para Serbia se anota qué existe un nivel de conocimientos en fotogrametría bajo, pero muy similar entre todas las preguntas planteadas. Llama la atención de manera contundente que en Chile la identificación y tratamiento de parámetros de sensores tiene un alto componente de validez, es decir, el atributo número 2, mientras que el atributo número 6, correspondiente a la parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos, tiene un bajo desempeño.

En Canadá existe un buen desempeño en la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales, relacionado al atributo número 1, qué contrasta con un bajo desempeño en la identificación y tratamiento de parámetros de sensores, mientras que los demás atributos tienen un valor creciente y se encuentran dentro del promedio.

En Japón existe un alto desempeño también en la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales, siendo el atributo 1. Existe equilibrio en el desempeño de lo relacionado con cálculos de distancias y desplazamientos en fotos aéreas, junto con las correcciones geométricas en fotografías aéreas verticales y la parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos.

En Egipto se establece un comportamiento muy similar en todas las variables, pero existen un sobresaliente desempeño en la identificación y tratamiento de parámetros de sensores.

En Nueva Zelanda el comportamiento es relativamente similar a la respuesta de todas las variables, a excepción de la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales, el cual es más significativo.

En Malasia existe un comportamiento bastante sólido en la identificación y tratamiento de parámetros de sensores y en la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales, qué contrasta con un comportamiento bajo en la parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos.

En Rusia se presenta un comportamiento ascendente en las variables 5 y 6, correspondientes a correcciones geométricas en fotografías aéreas y parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica, con un poco más de acierto, se encuentra la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales.

En Brasil se presenta un notable desempeño en la identificación y tratamiento de parámetros de sensores y en la utilización de relaciones matemáticas básicas, mientras que hay menor desempeño en la parametrización y cálculo de paralaje estereoscópica y puntos homólogos.

En general se puede indicar qué las universidades que están en los países con un mejor desempeño en esta prueba de conocimiento de fotogrametría, tienen un

común denominador: un buen desempeño en el atributo 1, referente a la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales. Lo que hace deducir, que si se tiene una fundamentación en la parte conceptual, se puede llegar a tener un desempeño sobresaliente en lo relacionado con cálculos, geometría, parametrización y relaciones matemáticas.

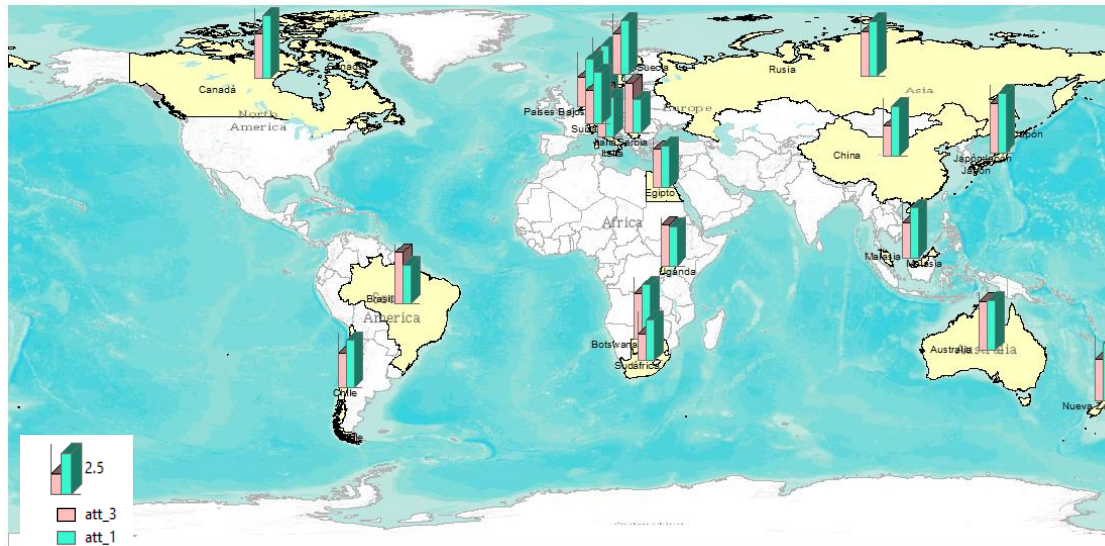


Figura 35 Comparación entre respuestas 1 y 3 de conocimientos de fotogrametría

Estableciendo una comparación entre las preguntas disciplinares del instrumento, aplicadas en las universidades correspondientes a la utilización de relaciones matemáticas básicas, frente a la conceptualización de datos básicos de fotografías aéreas verticales. Se puede inferir que, en las universidades pertenecientes a los países con mejor desempeño, la conceptualización de datos básicos es realmente más notable. Se responde con mayor acierto en la utilización de relaciones matemáticas. En contraste con esa situación, en las universidades pertenecientes a los países que han presentado inferior desempeño, la relación es totalmente opuesta. Posibilitando interpretar que la parte conceptual de datos básicos en fotografías aéreas, puede llegar a ser la causa de tener mejor desempeño general en las pruebas realizadas.

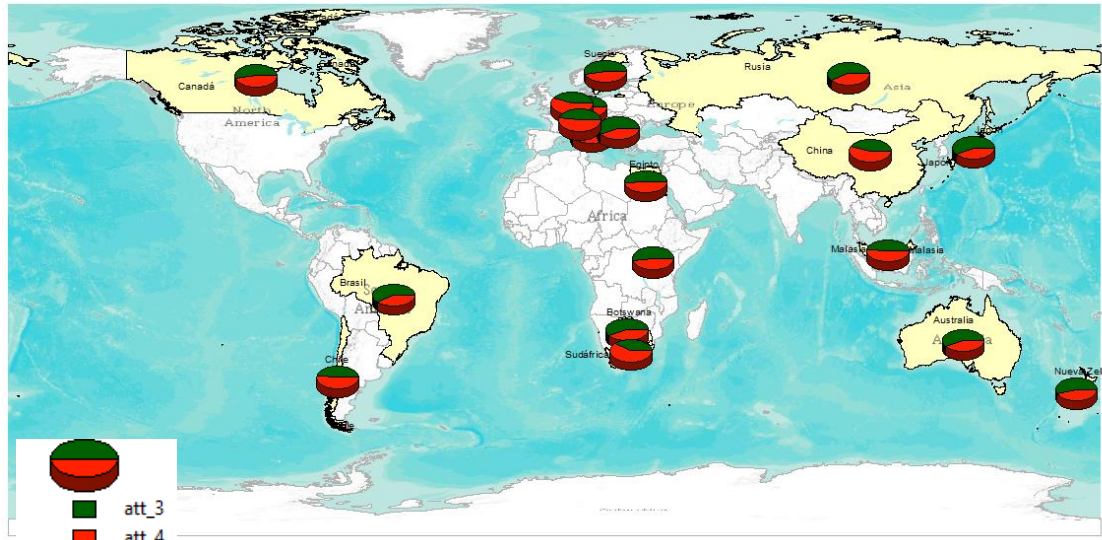


Figura 36. Comparación entre respuestas 3 y 4 de conocimientos de fotogrametría

Haciendo una relación comparativa de la utilización de relaciones matemáticas básicas, es decir el atributo número 3; y los cálculos de distancias y desplazamientos en fotos aéreas, se puede colegir, que es tímidamente mayor el desempeño en la utilización de relaciones matemáticas básicas, especialmente en los países que presentan mejor desarrollo, a excepción de China. Donde la relación es levemente inversa, esto significa que, para esa universidad, los cálculos de distancias son más fáciles de realizar que el planteamiento de relaciones matemáticas básicas.

Figura 37 Comparación entre respuestas 2 y 4 de conocimientos de fotogrametría

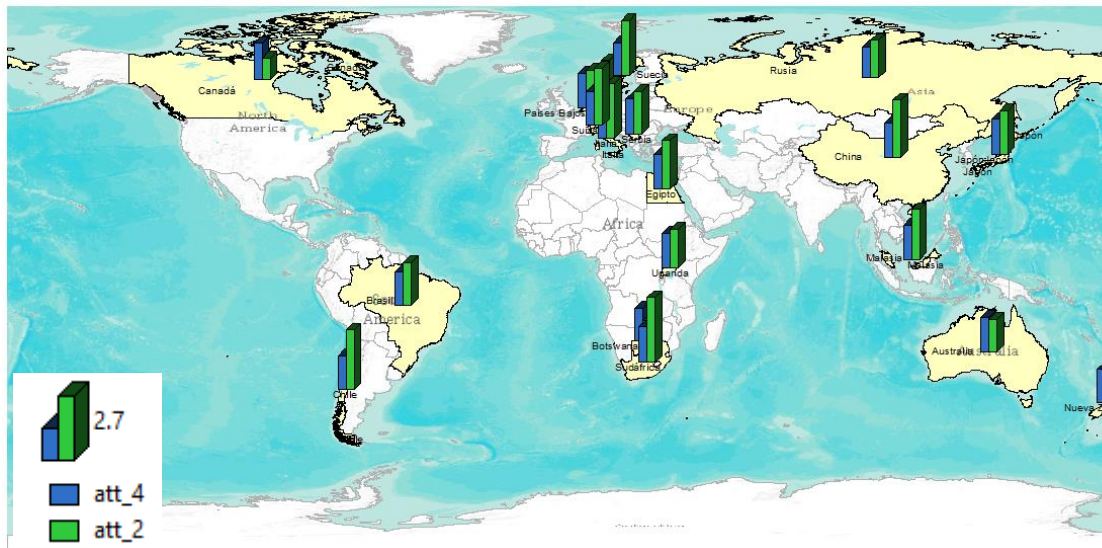


Figura 38 Comparación entre respuestas 2 y 4 de conocimientos de fotogrametría

Si se compara el desempeño obtenido en las pruebas de identificación y tratamiento de parámetros de sensores, atributo 2, frente a los cálculos de distancias y desplazamientos en fotos aéreas, se puede deducir que en general, en las universidades pertenecientes a los países que tienen un mejor desempeño, estos dos elementos son relativamente similares. Es el caso de los países europeos, de Rusia Australia y Nueva Zelanda. En contraste, para las universidades que pertenecen a los países de Suramérica y África, el comportamiento en cuanto a la identificación y tratamiento de parámetros de sensores, es más alto que el de cálculo de distancias y desplazamientos en fotos aéreas. Lo que permite concluir, que es bueno en la parte de identificación, pero no en la parte de cálculo de distancias.

El análisis de resultados en contrastación con los hallazgos y el marco teórico evidencia que de acuerdo a los resultados encontrados se puede reafirmar lo que dice Novo & Berciano (2019), en razón a que es fundamental el encuentro entre las nuevas tecnologías y poder enriquecerse con aprendizajes integrados al uso de software y al uso de tecnologías de postrimería generación, en campos tan específicos y de modernidad como el de la estereofotogrametría. Las estrategias didácticas pueden cooperar cómo lo enunciado por Ni'mah, Susanto, Sunardi & Hobri (2020) dado que los productos obtenidos muestran aportes metodológicos que realmente contribuyen a mejorar las prácticas y a fortalecer las habilidades para poder realizar mediciones confiables y precisas. Esto se evidencia con los resultados obtenidos, dado que los estudiantes que mejores resultados tienen en el constructo relacionado de los niveles Van Halen, también tienen buen desempeño en las pruebas específicas de fotogrametría. Los resultados de la aplicación de los constructos muestran que es posible reafirmar lo mencionado por Rohmah, Sunardi, Irvan, Hobri, & Dewi, (2020), en virtud a que esos niveles de comprensión en la geometría y que fueron definidos por el modelo Van Hiele aún siguen cobrando vigencia y son útiles en muchos campos de acción. Adicionalmente, poder realizar las pruebas y obtener resultados comparativos entre latitudes tan diversas, permiten dar la razón a Karami, Menna, & Remondino (2022), pues, en realidad la estereofotogrametría es una técnica que además de estar consolidada, sigue creciendo; pudiendo tener mediciones y cálculos del mundo cambiante, junto con las características dinámicas de los elementos que se encuentran en el entorno, con una característica genuina de los sensores remotos, sin tener contacto directo con el objeto.

CAPITULO V

5. Conclusiones

Las conclusiones que se han extraído de la investigación realizada en esta tesis se presentan a continuación:

- En conjunto la teoría del nivel de Van Hiele desarrollada en la década de 1950, es una teoría confiable sobre la adquisición de conocimientos en geometría, como un sistema matemático. Presenta una gran relevancia en la explicación de las dificultades de los estudiantes en el proceso enseñanza - aprendizaje de la geometría. Se plantea algunas alternativas de solución para afrontar ese inconveniente; aplicando la teoría en planes de estudio de diferentes partes del mundo, con gran éxito. Se ha dado soluciones gracias a su confiabilidad de niveles de comprensión en geometría, de propiedades de esos niveles y de los principios que subyacen para ir de un nivel a otro.
- En la teoría Van Hiele los niveles se reconocen claramente. Teniendo un nivel de reconocimiento, que permite al estudiante visualizar y aprender nombres de figuras y relacionarlos con el mundo real. Un nivel de análisis, para que el estudiante pueda identificar propiedades de las figuras geométricas. Un nivel de ordenación, dando posibilidades para que se puedan clasificar de manera lógica las figuras y las relaciones, dentro de un sistema matemático. Otro nivel de deducción, considerando que quien estudia geometría, comprenda la importancia de los postulados, teoremas y pruebas. Finalmente, presenta un nivel de rigor, donde facilita al estudiante la capacidad de hacer deducciones abstractas.
- El modelo Van Hiele presenta un fuerte soporte bibliográfico y teórico, además de una coherencia que permite seguir siendo utilizado en otras áreas

relacionadas con geometría. Es el caso de la estereofotogrametría, donde es posible utilizarlo con claridad, confiabilidad y contundencia. Más allá de que haya datación de cerca de 80 años, sigue cobrando relevancia y vigencia; dada su esquematización y permisividad para la obtención de resultados satisfactorios.

- La teoría Van Hiele es sólida en los aspectos relacionados de la prevalencia de sus niveles, gracias a las propiedades que pueda tener cada uno de ellos y el éxito en la comprensión del aprendizaje de la geometría. Estos aspectos, justamente tienen identidad en el área de la fotogrametría y la estereofotogrametría, en virtud a que, desde el principio elemental de tomar las fotografías aéreas y posteriormente llevarlas a un producto cartográfico, en todos los procesos y procedimientos existe transversalidad en el ámbito geométrico.
- Este estudio permitió realizar el diseño de una serie de preguntas relacionadas con los niveles y sus propiedades, más no, con el movimiento de un nivel a otro. Los instrumentos construidos fueron aplicados a 467 estudiantes, pertenecientes a 19 universidades de diferentes partes del mundo. Inicialmente, fueron identificadas un total 111 universidades, en donde se tiene conocimiento de carreras afines al área de la geomática y en cuyo pensum académico, se encuentra un núcleo temático de fotogrametría digital avanzada. Dentro de los países a los cuales pertenecen las universidades en donde se realizó el ejercicio se pueden Mencionar: Australia, Brasil, Canadá, China, Botswana, Chile, Egipto, Alemania, Italia, Japón, Malasia, Países Bajos, Nueva Zelanda, Rusia, Sudáfrica, Serbia, Suecia, Suiza y Uganda.
- Los instrumentos construidos y aplicados, para este estudio fueron dos. Uno netamente relacionado con la teoría de Van Hiele y el otro relacionado con conocimientos específicos del área de la fotogrametría. El primero de ellos, se aplicó y tuvo resultados Similares en cuanto a su desempeño, pero al mismo tiempo haciendo notar que la fundamentación en geometría es más contundente en países europeos y los ubicados en el hemisferio norte. El segundo instrumento referente a conocimientos en fotogrametría, evidenció que la fundamentación teórica es esencial, para la comprensión de conceptos más complejos en la aplicación directa del área de trabajo, dejando ver una tendencia más marcada que exhibe resultados de mejor desempeño en los países denominados de primer mundo. En contraste, existe bajo desempeño, en las universidades que se encuentran en países de Sudamérica

y África.

- Consecuente con el trabajo realizado, las pruebas aplicadas y los resultados obtenidos, se puede concluir que es totalmente viable la realización de una propuesta didáctica a partir de la aplicación del modelo Van Hiele para la enseñanza de la estereofotogrametría, específicamente en el ámbito de aula y laboratorio para los estudiantes que cursan fotogrametría digital avanzada.
- El trabajo desarrollado permitió reconocer los elementos del modelo Van Hiele, aplicados a la enseñanza de la fotogrametría. Específicamente, el reconocimiento de los cinco niveles que plantea la teoría, las cinco propiedades de cada uno de los niveles y las cinco fases que permiten el movimiento de un nivel a otro. Sin lugar a dudas, estos elementos van a contribuir al mejoramiento del desempeño académico en estudiantes de fotogrametría digital avanzada.
- De acuerdo a la investigación realizada se pudo caracterizar los procesos de aprendizaje que se encuentran asociados al mejoramiento de la obtención de precisiones en los procesos fotogramétricos, que permiten obtener medidas en fotografías aéreas verticales con mayor grado de precisión. Estos procesos de aprendizaje, se encuentran claramente establecidos y son el elemento integrador y de soporte, para la propuesta didáctica que se realizó en este trabajo, La propuesta generada permite entregar los contenidos que se van a aprender, las actividades a desarrollar, las estrategias, el tiempo, los recursos y materiales necesarios para realizar todas las actividades concernientes a la implementación de esa propuesta didáctica en la enseñanza de la estereofotogrametría.
- Finalmente es necesario reconocer que se realiza la total validación de la propuesta didáctica generada, teniendo en cuenta los niveles, las propiedades y las fases del modelo Van Hiele, que fueron evaluados y aceptados por expertos internacionales.

5.1. Líneas de Investigación futura

- Profundización en los procedimientos para movimiento de nivel o cambio de fase en el modelo Van Hiele.
- Aplicación del modelo Van Hiele, en la segmentación automática de imágenes, pancromáticas, color y multiespectrales.
- Profundización teórica en el estudio de la geometría epipolar utilizada en fotogrametría terrestre y el modelo Van Hiele.
- Utilización de las propiedades de los niveles del modelo Van Hiele en la clasificación automática de nubes de puntos.

6. BIBLIOGRAFIA

- Agustiniingsih, N., Susanto, & Yuliati, N. (2019). Student creative thinking process in solving geometry problems based on van hiele level. Paper presented at the IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, , 243(1) doi:10.1088/1755-1315/243/1/012126
- Alfio, V. S., Costantino, D., & Pepe, M. (2020). Influence of image tiff format and jpeg compression level in the accuracy of the 3d model and quality of the orthophoto in uav photogrammetry. *Journal of Imaging*, 6(5) doi:10.3390/jimaging6050030
- Barreto, M. A., Perez-Gonzalez, J., Herr, H. M., & Huegel, J. C. (2022). ARACAM: A RGB-D multi-view photogrammetry system for lower limb 3D reconstruction applications. *Sensors*, 22(7) doi:10.3390/s22072443
- Brezzi, L., Gabrieli, F., Cola, S., Lorenzetti, G., Spiezia, N., Bisson, A., & Allegrini, M. (2020). Digital terrestrial stereo-photogrammetry for monitoring landslide displacements: A case study in recoaro terme (VI) doi:10.1007/978-3-030-21359-6_17 Retrieved from www.scopus.com
- Cao, Y., Ding, B., Chen, J., Liu, W., Guo, P., Huang, L., & Yang, J. (2022). Photometric-stereo-based defect detection system for metal parts. *Sensors*, 22(21) doi:10.3390/s22218374
- Dewi, A. K., Sunardi, Irvan, M., Hobri, & Rohmah, F. N. (2020). Students' error analysis in solving geometry problems based on the mathematical anxiety under the theory of van hiele. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1465(1) doi:10.1088/1742-6596/1465/1/012059
- Chang, H. -, & Lin, T. -. (2022). Portrait imaging relighting system based on a simplified photometric stereo method. *Applied Optics*, 61(15), 4379-4386. doi:10.1364/AO.451662
- Geng, X., Xu, Q., Wang, J., Lan, C., Qin, F., & Xing, S. (2022). Generation of large-scale orthophoto mosaics using MEX HRSC images for the candidate landing regions of china's first mars mission. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 60 doi:10.1109/TGRS.2021.3128518

- Guo, Q., Liu, H., Hassan, F. M., Bhatt, M. W., & Buttar, A. M. (2022). Application of UAV tilt photogrammetry in 3D modeling of ancient buildings. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 13, 424-436. doi:10.1007/s13198-021-01458-4
- Hamidah, & Kusuma, J. W. (2020). Analysis of student learning styles and geometry thinking skills: During the COVID-19 pandemic. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1657(1) doi:10.1088/1742-6596/1657/1/012036
- Hassan, M. N., Abdullah, A. H., & Ismail, N. (2020). Effects of VH-iSTEM learning strategy on basic secondary school students' degree of acquisition of van hiele levels of thinking in sokoto state, nigeria. *Universal Journal of Educational Research*, 8(9), 4213-4223. doi:10.13189/ujer.2020.080948
- He, S., Li, S., Jiang, S., & Jiang, W. (2022). HMSM-net: Hierarchical multi-scale matching network for disparity estimation of high-resolution satellite stereo images. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 188, 314-330. doi:10.1016/j.isprsjprs.2022.04.020
- Herban, S., Costantino, D., Alfio, V. S., & Pepe, M. (2022). Use of low-cost spherical cameras for the digitisation of cultural heritage structures into 3D point clouds. *Journal of Imaging*, 8(1) doi:10.3390/JIMAGING8010013
- Hu, X. -, Wagley, N., Rioboo, A. T., Dasilva, A. F., & Kovelman, I. (2020). Photogrammetry-based stereoscopic optode registration method for functional near-infrared spectroscopy. *Journal of Biomedical Optics*, 25(9) doi:10.1117/1.JBO.25.9.095001
- Hu, Y., Liang, Z., Feng, S., Yin, W., Qian, J., Chen, Q., & Zuo, C. (2022). Calibration and rectification of bi-telecentric lenses in scheimpflug condition. *Optics and Lasers in Engineering*, 149 doi:10.1016/j.optlaseng.2021.106793
- Huang, X., & Qin, R. (2020). Post-filtering with surface orientation constraints for stereo dense image matching. *Photogrammetric Record*, 35(171), 375-401. doi:10.1111/phor.12333
- Isa, M. A., Sims-Waterhouse, D., Piano, S., & Leach, R. (2020). Volumetric error modelling of a stereo vision system for error correction in photogrammetric three-dimensional coordinate metrology. *Precision Engineering*, 64, 188-199. doi:10.1016/j.precisioneng.2020.04.010

- Kandaga, T., Rosjanuardi, R., & Juandi, D. (2022). Epistemological obstacle in transformation geometry based on van Hiele's level. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(4) doi:10.29333/ejmste/11914
- Karami, A., Menna, F., & Remondino, F. (2022). Combining photogrammetry and photometric stereo to achieve precise and complete 3D reconstruction. *Sensors*, 22(21) doi:10.3390/s22218172
- Karami, A., Menna, F., Remondino, F., & Varshosaz, M. (2022). Exploiting light directionality for image-based 3D reconstruction of non-collaborative surfaces. *Photogrammetric Record*, 37(177), 111-138. doi:10.1111/phor.12400
- Laily, N. I., Sunardi, Yuliaty, N., Imamah, E. N., & Sari, M. P. (2020). The profile of students conceptual understanding and procedural knowledge in solving geometry problems based on van hiele levels. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1538(1) doi:10.1088/1742-6596/1538/1/012080
- Li, X., Wang, M., & Fang, Y. (2022). Height estimation from single aerial images using a deep ordinal regression network. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 19 doi:10.1109/LGRS.2020.3019252
- Li, Z., Wu, B., Liu, W. C., & Chen, Z. (2022). Integrated photogrammetric and photoclinometric processing of multiple HRSC images for pixelwise 3-D mapping on mars. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 60 doi:10.1109/TGRS.2021.3106737
- Ling, X., & Qin, R. (2022). A graph-matching approach for cross-view registration of over-view and street-view based point clouds. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 185, 2-15. doi:10.1016/j.isprsjprs.2021.12.013
- Liu, C., Jia, S., Wu, H., Zeng, D., Cheng, F., & Zhang, S. (2020). A spatial-frequency domain associated image-optimization method for illumination-robust image matching. *Sensors (Switzerland)*, 20(22), 1-23. doi:10.3390/s20226489
- Liu, W. C., & Wu, B. (2020). An integrated photogrammetric and photoclinometric approach for illumination-invariant pixel-resolution 3D mapping of the lunar surface. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 159, 153-168. doi:10.1016/j.isprsjprs.2019.11.017

- Liu, X., & Li, A. (2022). An integrated calibration technique for variable-boresight three-dimensional imaging system. *Optics and Lasers in Engineering*, 153 doi:10.1016/j.optlaseng.2022.107005
- Liu, Y., Lv, Z., Zhang, Q., Zhao, J., Fang, Z., Gao, Z., & Su, Y. (2022). Comparison study of three camera calibration methods considering the calibration board quality and 3D measurement accuracy. *Experimental Mechanics*, doi:10.1007/s11340-022-00905-y
- Machisi, E. (2021). Grade 11 students' reflections on their euclidean geometry learning experiences. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(2), 1-19. doi:10.29333/EJMSTE/9672
- Mbusi, N. P., & Luneta, K. (2021). Mapping pre-service teachers' faulty reasoning in geometric translations to the design of van hiele phase-based instruction. *South African Journal of Childhood Education*, 11(1) doi:10.4102/sajce.v11i1.871
- Miatun, A., Khusna, H., & Slamet. (2021). Van hiele levels: Errors in solving geometry problems from mathematical disposition. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1933(1) doi:10.1088/1742-6596/1933/1/012115
- Moyano, J., Nieto-Julián, J. E., Lenin, L. M., & Bruno, S. (2022). Operability of point cloud data in an architectural heritage information model. *International Journal of Architectural Heritage*, 16(10), 1588-1607. doi:10.1080/15583058.2021.1900951
- Mundy, J. L., & Theiss, H. J. (2022). Error propagation in satellite multi-image geometry. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 60 doi:10.1109/TGRS.2021.3128776
- Naufal, M. A., Abdullah, A. H., Osman, S., Abu, M. S., Ihsan, H., & Rondiyah. (2021). Reviewing the van hiele model and the application of metacognition on geometric thinking. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 10(2), 597-605. doi:10.11591/ijere.v10i2.21185
- Ngeljaratan, L., & Moustafa, M. A. (2022). UNCERTAINTY AND ACCURACY OF VISION-BASED TRACKING CONCERNING STEREOGRAMMETRY AND NOISE-FLOOR TESTS. *Metrology and Measurement Systems*, 29(1), 75-92. doi:10.24425/mms.2022.140028

- Ngirishi, H., & Bansilal, S. (2019). An exploration of high school learners' understanding of geometric concepts. *Problems of Education in the 21st Century*, 77(1), 82-96. doi:10.33225/PEC/19.77.82
- Novo, M. L., & Berciano, A. (2019). Longitudinal study of the symbolic representation capacity in children in the 3-6 cycle of early childhood education in tasks related to mathematical dictation. [Estudio longitudinal de la capacidad de representación simbólica de niños y niñas en el ciclo 3-6 de Educación Infantil al abordar tareas relativas a dictados matemáticos] *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 33(64), 513-541. doi:10.1590/1980-4415v33n64a04
- Nusaibah, N., Pramudya, I., & Subanti, S. (2021). Geometric thinking skills of seventh grade students on the topic of triangle and quadrilateral based on van hiele geometry learning theory. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, 1776(1) doi:10.1088/1742-6596/1776/1/012020
- Paixão, A., Muralha, J., Resende, R., & Fortunato, E. (2022). Close-range photogrammetry for 3D rock joint roughness evaluation. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 55(6), 3213-3233. doi:10.1007/s00603-022-02789-9
- Pan, Y., & Wang, K. (2022). Dynamic measurement of three-dimensional absolute displacements using dual-camera multiplexed digital holography. *Applied Optics*, 61(3), 797-805. doi:10.1364/AO.446251
- Passos, A. Q., de Buriasco, R. L. C., & Soares, M. T. C. (2019). Van hiele ideas and the realistic mathematical education: A few approximations. [Ideias de Van Hiele e Educação Matemática Realística: Algumas aproximações] *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 33(65), 1533-1548. doi:10.1590/1980-4415v33n65a26
- Parr, B., Legg, M., & Alam, F. (2022). Analysis of depth cameras for proximal sensing of grapes. *Sensors*, 22(11) doi:10.3390/s22114179
- Pavlovičová, G., & Bočková, V. (2021). Geometric thinking of future teachers for primary education—An exploratory study in slovakia. *Mathematics*, 9(23) doi:10.3390/math9232992

- Peña, J. A. L., & Ortega, C. M. V. (2022). Development of geometric thought in high school students, when they learn the concept of homothecy. [DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA CUANDO ABORDAN EL CONCEPTO DE HOMOTECIA] *Revista Latinoamericana De Investigacion En Matematica Educativa*, 25(1), 93-120. doi:10.12802/relime.22.2514
- Pepe, M., & Costantino, D. (2020). Techniques, tools, platforms and algorithms in close range photogrammetry in building 3D model and 2D representation of objects and complex architectures. *Computer-Aided Design and Applications*, 18(1), 42-65. doi:10.14733/cadaps.2021.42-65
- Pujawan, I. G. N., Suryawan, I. P. P., & Prabawati, D. A. A. (2020). The effect of van hiele learning model on students' spatial abilities. *International Journal of Instruction*, 13(3), 461-474. doi:10.29333/iji.2020.13332a
- Rahayu, S., & Jupri, A. (2021). Geometrical thinking of junior high school students on the topic of lines and angles according to van hiele theory. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1806(1) doi:10.1088/1742-6596/1806/1/012089
- Rahman, H. S., Susanto, Hobri, Irfan, M., Karimah, R., & Albab, A. U. (2020). Scaffolding profile in solving geometry problems in terms of van hiele level. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1538(1) doi:10.1088/1742-6596/1538/1/012069
- Risnawati, Andrian, D., Azmi, M. P., Amir, Z., & Nurdin, E. (2019). Development of a definition maps-based plane geometry module to improve the student teachers' mathematical reasoning ability. *International Journal of Instruction*, 12(3), 541-560. doi:10.29333/iji.2019.12333a
- Rohmah, F. N., Sunardi, Irvan, M., Hobri, & Dewi, A. K. (2020). An analysis of the students' anxiety in solving creative thinking problem on geometry according to van hiele's theory. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1465(1) doi:10.1088/1742-6596/1465/1/012060
- Roldán-Zafra, J., & Perea, C. (2022). Math learning in a science Museum—Proposal for a workshop design based on STEAM strategy to learn mathematics. the case of the cryptography workshop. *Mathematics*, 10(22) doi:10.3390/math10224335

- Sabato, A., Valente, N. A., & Niezrecki, C. (2020). Development of a camera localization system for three-dimensional digital image correlation camera triangulation. *IEEE Sensors Journal*, 20(19), 11518-11526. doi:10.1109/JSEN.2020.2997774
- Salvini, R., Vanneschi, C., Coggan, J. S., & Mastrococco, G. (2020). Evaluation of the use of UAV photogrammetry for rock discontinuity roughness characterization. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 53(8), 3699-3720. doi:10.1007/s00603-020-02130-2
- Sarker, M. M., Hadigheh, S. A., & Dias-da-Costa, D. (2020). Stereoscopic modelling and monitoring of roughness in concrete pavements doi:10.1007/978-981-13-7603-0_62 Retrieved from www.scopus.com
- She, M., Weiß, T., Song, Y., Urban, P., Greinert, J., & Köser, K. (2022). Marine bubble flow quantification using wide-baseline stereo photogrammetry. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 190, 322-341. doi:10.1016/j.isprsjprs.2022.06.014
- Slocum, R. K., Parrish, C. E., & Simpson, C. H. (2020). Combined geometric-radiometric and neural network approach to shallow bathymetric mapping with UAS imagery. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 169, 351-363. doi:10.1016/j.isprsjprs.2020.09.002
- Specht, M., Wiśniewska, M., Stateczny, A., Specht, C., Szostak, B., Lewicka, O., . . . Halicki, A. (2022). Analysis of methods for determining shallow waterbody depths based on images taken by unmanned aerial vehicles. *Sensors*, 22(5) doi:10.3390/s22051844
- Sulistiowati, D. L., Herman, T., & Jupri, A. (2019). Student difficulties in solving geometry problem based on van hiele thinking level. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1157(4) doi:10.1088/1742-6596/1157/4/042118
- Therán-Palacio, Eugenio (2021). Pensamiento Geométrico, Teoría de Van Hiele y Tecnologías Computacionales. *J. Comput. Electron. Sci.: Theory Appl.*, vol. 2 no. 1 pp. 39-50. Enero - Junio, 2021, DOI: <https://doi.org/10.17981/cesta.02.01.2021.04> .

- Uyen, B. P., Ngan, L. K., Thao, N. P., & Tong, D. H. (2021). Impulsing the development of students' competency related to mathematical thinking and reasoning through teaching straight-line equations. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 20(6), 38-65. doi:10.26803/IJLTER.20.6.3
- Wang, J., Tao, B., Gong, Z., Yu, S., & Yin, Z. (2020). A mobile robotic measurement system for large-scale complex components based on optical scanning and visual tracking. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 67 doi:10.1016/j.rcim.2020.102010
- Wang, R. -, & Lin, C. -. (2022). Dual guided aggregation network for stereo image matching. *Sensors*, 22(16) doi:10.3390/s22166111
- Wang, W., & Chen, A. (2020). Target-less approach of vibration measurement with virtual points constructed with cross ratios. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 151 doi:10.1016/j.measurement.2019.107238
- Wijaya, H. T., Sunardi, Yudianto, E., Cahyanita, E., & Aini, N. R. (2021). The development of the spatial visual-oriented geometry test to measure the creative thinking skills of elementary students. Paper presented at the *Journal of Physics: Conference Series*, , 1918(4) doi:10.1088/1742-6596/1918/4/042068
- Yan, W., Ren, X., Liu, J., Zhang, L., Chen, W., Wang, D., . . . Song, C. (2022). Topographic reconstruction of the 'tianwen-1' landing area on the mars using high resolution imaging camera images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 60 doi:10.1109/TGRS.2022.3206961
- Ye, M., Liang, J., Li, L., Zong, Y., Guo, J., Tang, Z., . . . Chen, R. (2022). Simultaneous measurement of external and internal surface shape and deformation based on photogrammetry and stereo-DIC. *Optics and Lasers in Engineering*, 158 doi:10.1016/j.optlaseng.2022.107179
- Yookwan, W., Chinnasarn, K., So-In, C., & Horkaew, P. (2022). Multimodal fusion of deeply inferred point clouds for 3D scene reconstruction using cross-entropy ICP. *IEEE Access*, 10, 77123-77136. doi:10.1109/ACCESS.2022.3192869
- Zhang, S., Peng, S., Wu, Y., Wen, B., Zhang, J., Jia, Y., . . . Li, H. (2022). Positioning accuracy of the zhurong mars rover's Hand–Eye system. *Photogrammetric Record*, 37(177), 61-86. doi:10.1111/phor.12401
- Zhang, Y., Yang, J., Li, G., Zhao, T., Song, X., Zhang, S., . . . Zhang, M. (2022). Camera calibration for long-distance photogrammetry using unmanned aerial vehicles. *Journal of Sensors*, 2022 doi:10.1155/2022/8573315

- Zhu, Q., Wang, Z., Hu, H., Xie, L., Ge, X., & Zhang, Y. (2020). Leveraging photogrammetric mesh models for aerial-ground feature point matching toward integrated 3D reconstruction. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 166, 26-40. doi:10.1016/j.isprsjprs.2020.05.024
- Zhou, L., Liu, J., & Lo, J. -. (2022). A comparison of U.S. and chinese geometry standards through the lens of van hiele levels. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 10(1), 38-56. doi:10.46328/ijemst.1848

7. ANEXOS

Anexo 1 Prueba de acceso elemental de geometría

7.1. Anexo 1 PRUEBA DE ACCESO ELEMENTAL DE GEOMETRÍA

Apreciado estudiante. El presente cuestionario tiene como objetivo recopilar datos con referencia a el uso de la geometría elemental en procesos que conduzcan a dar un análisis de cómo se utiliza la geometría en procesos fotogramétricos específicamente en el área de la estereofotogrametría.

El cuestionario es anónimo y los resultados serán tratados con total confidencialidad única y exclusivamente para los fines de la investigación. Es importante que las respuestas se den en los tiempos establecidos y con los parámetros generales planteados.

Instrucciones

Este cuestionario está referido a preguntas básicas correspondientes a conceptos geométricos, que son la etapa inicial para ser relacionados con la introducción a la teoría Van Hiele. El texto contiene 20 preguntas. De selección múltiple con única respuesta.

Las 5 primeras preguntas del instrumento aplicado en este estudio, están diseñadas para determinar el nivel donde se encuentra cada estudiante y comprobar la propiedad de secuencia fija de los niveles. Las preguntas 6 a 10 ponen a prueba la capacidad de los niveles Van Hiele para predecir el rendimiento en geometría. Las preguntas 11 a 15, se refieren a la propiedad de separación de los niveles y proporcionan una prueba menos formal de la validez de esa conducta. Las preguntas de la 16 a la 20, evalúan la capacidad de relacionar figuras geométricas y realizar cálculos matemáticos básicos de la geometría.

Tiempo estimado: 25 minutos

PRUEBA DE INICIAL DE GEOMETRÍA DEL ESTUDIANTE

1. Las líneas perpendiculares:

- a. se cruzan para formar cuatro ángulos rectos
- b. se cruzan para formar dos ángulos agudos y dos obtusos
- c. no se cruzan en absoluto
- d. se cruzan para formar cuatro ángulos agudos
- e. ninguna de las anteriores

2. El área de un rectángulo de 3 metros de largo y 12 metros de ancho es:

- a. 18 metros cuadrados
- b. 72 metros cuadrados
- c. 36 metros cuadrados
- d. 15 metros cuadrados
- e. 30 metros cuadrados

3. Si dos figuras son similares, pero no congruentes, entonces:

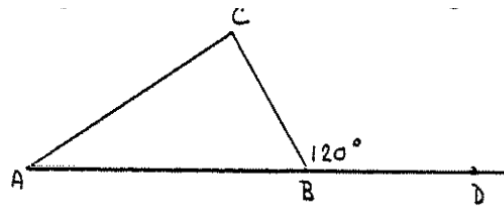
- a. tienen bases y alturas congruentes
- b. tienen la misma altura
- c. ambas tienen bases horizontales
- d. tienen una forma diferente pero el mismo tamaño
- e. tienen un tamaño diferente pero la misma forma

4. La medida de un ángulo obtuso es:

- a. 90°
- b. entre 45° y 90°
- c. menos de 90°
- d. entre 90° y 180°
- e. más de 180°

5. A la derecha, A, B y D se encuentran en una línea recta. La medida del ángulo ABC es:

- a. 120°
- b. 60°
- c. 80°
- d. 240°
- e. Se necesita más información

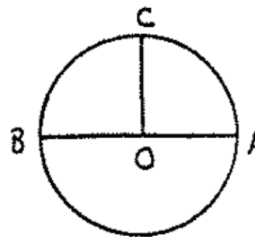


6. Las líneas paralelas, son líneas:

- a. en el mismo plano que nunca se encuentran
- b. que nunca se encuentran en el mismo plano y nunca se juntan
- c. que siempre forman ángulos de 90° cuando se encuentran
- d. que tienen la misma longitud
- e. ninguna de las anteriores

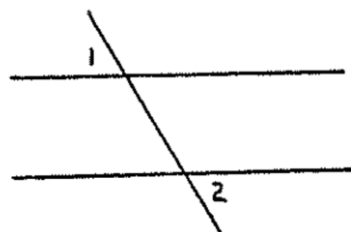
7. Si O es el centro del círculo, OA es llamado:

- a. radio del círculo
- b. diámetro del círculo
- c. cuerda del círculo
- d. segmento del círculo
- e. sector del círculo



8. Los ángulos 1 y 2 se llaman

- a. ángulos opuestos
- b. ángulos paralelos
- c. ángulos interiores alternos
- d. ángulos exteriores alternos
- e. ángulos correspondientes



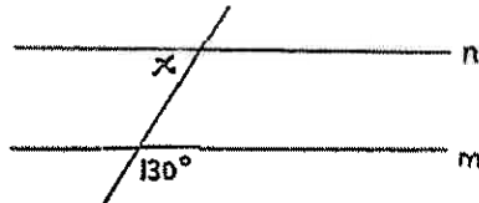
9. La medida de un ángulo recto es

- a. menor que 90°

- b. entre 90° y 180°
- c. 45
- d. 90°
- e. 180°

10. Las líneas n y m son paralelas. La medida de ángulo x es

- a. 65°
- b. 130°
- c. 30°
- d. 40°
- e. 50°

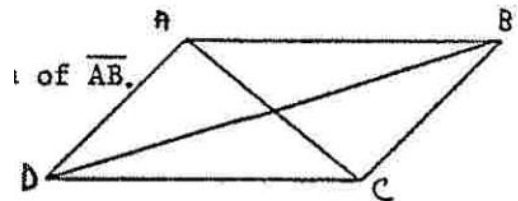


11. Un triángulo equilátero tiene

- a. los tres lados tienen la misma longitud
- b. un ángulo obtuso
- c. dos ángulos que tienen la misma medida y el tercero una medida diferente
- d. los tres lados tienen longitudes diferentes
- e. los tres ángulos tienen medidas diferentes

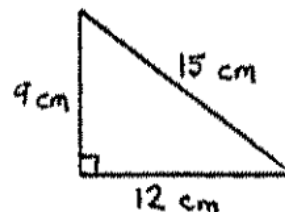
12. Dado que ABCD es un paralelogramo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a. ABCD es equiangular
- b. El triángulo ABD es congruente con el triángulo CDB
- c. El perímetro de ABCD es cuatro veces la longitud
- d. AC es la misma longitud BD,
- e. Todas las anteriores son ciertas



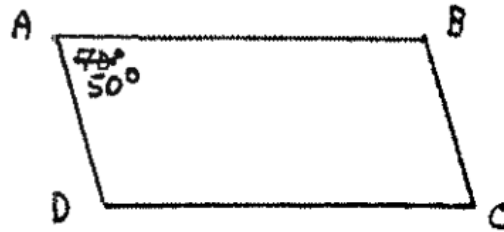
13. El área del triángulo mostrado es:

- a. 36 cm^2
- b. 54 cm^2
- c. 72 cm^2
- d. 108 cm^2
- e. 1620 cm^2



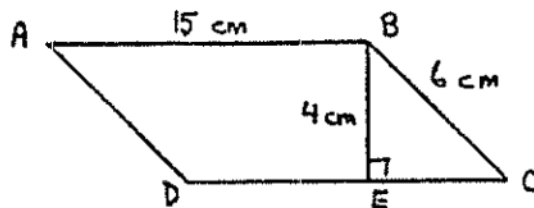
14. ABCD es un paralelogramo. La medida del ángulo C es:

- a. 40°
- b. 130°
- c. 140°
- d. 50°
- e. Se requiere más información



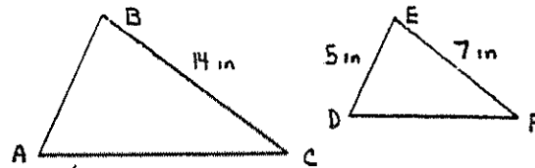
15. El perímetro de este paralelogramo ABCD es:

- a. 25 cm
- b. 42 cm
- c. 21 cm
- d. 60 cm
- e. 90 cm



16. El triángulo ABC es similar al triángulo DEF. La medida de AB es:

- a. 10 pulgadas
- b. 11 pulgadas
- c. 12 pulgadas
- d. 13 pulgadas
- e. 15 pulgadas



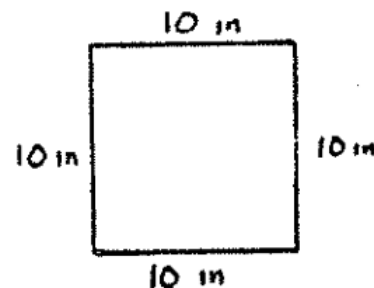
17. La figura plana producida al dibujar todos los puntos exactamente a 6 metros de un

punto dado es un:

- a. un círculo con un diámetro de 6 metros
- b. cuadrado con un lado de 6 metros
- c. esfera con un diámetro de 6 metros
- d. cilindro de 6 metros de alto y 6 metros de ancho
- e. círculo con un radio de 6 metros

18. El área del cuadrado mostrado es:

- a. 20 metros cuadrados
- b. 60 metros cuadrados
- c. 40 metros cuadrados
- d. 100 metros cuadrados
- e. 100 metros



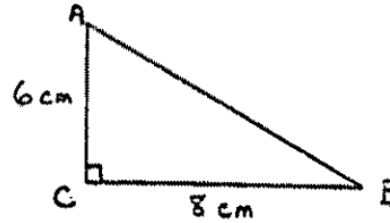
19. Los ángulos 1 y 2 son:

- a. interiores
- b. verticales
- c. isósceles
- d. complementarios
- e. escaleno



20. El ángulo C es un ángulo recto. La longitud de AB es

- a. 8 cm
- b. 14 cm
- c. 10 cm
- d. 12 cm
- e. 18 cm



Anexo 2 Prueba de conocimiento de elementos fotogramétricos

7.2. Anexo 2 . Prueba de conocimiento de elementos fotogramétricos

Tiempo estimado: 180 minutos

1. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- a) Altura de vuelo sobre un punto “Q” = 560m.
- b) Altura de vuelo para el punto más alto del terreno = 500m.
- c) Elevación máxima del terreno = 1000m.

Calcular la elevación del punto “Q”.

$$\begin{aligned}Z_Q &= 560 \\Z_A &= 500 \\H_A &= 1000 \\H_M &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}H_Q &= Z_A + H_A - Z_Q \\H_Q &= 500 + 1000 - 560 \\H_Q &= 940\end{aligned}$$

2. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- a) Elevación para un punto “Q” del terreno = 3850m.
- b) Altura media del vuelo = 4012.5m.
- c). Elevación de un punto situado sobre el nivel medio del terreno = 3987.5m.

Determinar la altura de vuelo para el punto “Q”.

$$\begin{aligned}H_Q &= 3850 \\Z_M &= 4012.5 \\H_M &= 3987.5 \\Z_Q &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}Z_Q + H_Q &= Z_M + H_M \\Z_Q &= Z_M + H_M - H_Q \\Z_Q &= 4012.5 + 3987.5 - 3850 \\Z_Q &= 4150\end{aligned}$$

3. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- a) Altura absoluta de vuelo = 7000m.
- b) Altura mínima de vuelo = 3250m.
- c) Elevación para el punto más bajo = 3275m.

Calcular la elevación media del terreno.

$$\begin{aligned}Z_O &= 7000 \\Z_B &= 3250 \\H_B &= 3275 \\H_M &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}H_A &= Z_O - Z_B \\H_A &= 7000 - 3250 = 3750 \\H_M &= \frac{1}{2}(H_A + H_B) \\H_M &= \frac{1}{2}(3750 + 3275) = 3512.5\end{aligned}$$

4. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Altura media de vuelo = 4325m.
- b) Elevación media del terreno = 1100m.
- c) Diferencia de elevación entre el punto más alto y el más bajo = 460m.

Determinar la altura de vuelo para el punto más alto y su elevación.

$$\begin{aligned}Z_M &= 4325 \\H_A &=? \\Z_A &=? \\ \Delta_{H_A-H_B} &= 460\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}H_A &= H_M + 460/2 \\H_A &= 1100 + 460/2 \\Z_A + H_A &= Z_M + H_M \\Z_A &= Z_M + H_M - H_A \\Z_A &= 4325 + 1100 - 1330 = 4095\end{aligned}$$

5. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- Sobre un plano situado a 1200m sobre el nivel del mar se midió una distancia de 375m en el terreno.
- La medida de la misma distancia sobre la fotografía fue de 2.5cm.

Calcular la escala de la fotografía para el plano mencionado.

$$\begin{aligned}H_Q &= 1200 \\D_T &= 375 \\d_{FA} &= 0.025 \\ \frac{1}{E_Q} &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_Q} &= \frac{d_{FA}}{D_T} = \frac{c}{Z_O - H_Q} \\E_Q &= \frac{D_T}{d_{FA}} = \frac{375}{0.025} = 15000 \\ \frac{1}{E_Q} &= 1; 15000\end{aligned}$$

6. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- Distancia principal = 150m.
- Altura de vuelo sobre el nivel del mar = 5300m.
- Elevación de un punto "Q" = 2120m.

¿Cuál es la escala para el punto “Q”?

$$C = 150mm$$

$$Z_o = 5300$$

$$H_Q = 2120$$

$$\frac{1}{E_Q} = ?$$

Solución:

$$\frac{1}{E_Q} = \frac{C}{Z_o - H_Q} \rightarrow E_Q = \frac{Z_o - H_Q}{C} \rightarrow E_Q = \frac{5300 - 2120}{0.15} = 21200$$

$$\frac{1}{E_Q} = 1; 21200$$

7. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- a). Escala máxima = 1: 6167.
- b). Una distancia de 900m sobre el nivel medio del terreno aparece en una fotografía en una magnitud de 120mm.
Calcular la escala mínima.

$$\frac{1}{E_A} = 1; 6167$$
$$D_T = 900$$
$$d_{FM} = 120mm$$
$$\frac{1}{E_B} = ?$$

Solución:

$$E_M = \frac{D_T}{d_{FM}} \rightarrow E_M = \frac{900}{0.12} = 7500$$
$$\Delta_E = E_M - E_A \rightarrow \Delta_E = 7500 - 6167 = 1333$$
$$\frac{1}{E_B} = E_M + \Delta_E \rightarrow E_B = 7500 + 1333 = 8833$$
$$\frac{1}{E_B} = 1; 8833$$

8. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Altura de vuelo para el punto más alto = 7185m.
- b) Escala para el punto más bajo = 1: 52100.
- c) Escala media = 1; 50000.

¿Cuál es la distancia principal?

$$Z_A = 7185$$
$$\frac{1}{E_B} = 1; 52100$$
$$\frac{1}{E_M} = 1; 50000$$
$$C = ?$$

Solución:

$$\frac{1}{E_A} = \frac{C}{Z_A} \rightarrow C = \frac{Z_A}{E_A}$$
$$\Delta_E = E_B - E_M \rightarrow \Delta_E = 52100 - 50000 = 2100$$
$$E_A = E_M - \Delta_E \rightarrow E_A = 50000 - 2100 = 47900$$
$$C = \frac{Z_A}{E_A} \rightarrow C = \frac{7185}{47900} = 0.15 \rightarrow 150mm$$

9. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 210mm.
- b) Altura media de vuelo = 2625m.
- c) Longitud en el terreno de una línea situada en el nivel medio = 400m.

¿Cuál es la magnitud de esta distancia medida en la fotografía?

$$C = 210 \rightarrow 0.21$$
$$Z_M = 2625$$
$$D_T = 400$$
$$d_{FM} = ?$$

Solución:

$$\frac{d_{FM}}{D_T} = \frac{C}{Z_M} \rightarrow d_{FM} = \frac{C * D_T}{Z_M} \rightarrow d_{FM} = \frac{0.21 * 400}{2625} = 0.032$$
$$d_{FM} = 32mm$$

10. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Altura da vuelo sobre el punto más alto. » 1320 m.
- b) Escala para el punto más alto = 1:8800.
- c) Altura de vuelo sobre el nivel del mar = 4600.
- d) Escala para un punto "Q" = 1:9500.

Determinar la elevación del punto "Q"

$$Z_A = 1320$$
$$E_A = 1; 8800$$
$$Z_O = 4600$$

$$\frac{1}{E_Q} = 1; 9500$$

$$H_Q = ?$$

Solución:

$$C = \frac{Z_A}{E_A} \rightarrow C = \frac{1320}{8800} = 0.15$$

$$(-H_Q = (C * E_Q) - Z_O) * -1$$

$$(-H_Q = (0.15 * 9500) - 4600) * -1 = 3175$$

$$H_M = 3175$$

11. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 150 mm.
- b) Altura ele vuelo máxima = 2070 m.
- c) Escala media = 1*12500.
- d) Distancia en el terreno entre dos puntos situados en el nivel más alto = 675m.

Determinar la magnitud de esta distancia en la fotografía.

$$C = 0.15$$

$$Z_A = 2070$$

$$\frac{1}{E_M} = 1; 12500$$

$$D_T = 675$$

$$d_{FM} = ?$$

Solución:

$$\frac{1}{E_B} = \frac{C}{Z_B} \rightarrow E_B = \frac{Z_B}{C} \rightarrow E_B = 1; 13800$$

$$E_M = \frac{1}{2}(E_A * E_B) \rightarrow E_A = 2 * E_M - E_B = 11200$$

$$\frac{1}{E_A} = \frac{d_{FA}}{D_T} \rightarrow d_{FA} = \frac{D_T}{E_A} \rightarrow d_{FA} = 60.3$$

12. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- a) Escala mínima = 1:38111.
- b) Una distancia de 1300 m sobre el nivel medio del terreno aparece en la fotografía en una magnitud de 37.1 mm.

Si esta línea, estuviera sobre el nivel más alto en ¿Que magnitud parecería en la fotografía?

$$\frac{1}{E_B} = 1:38111$$
$$D_T = 1300$$
$$d_{FM} = 37.1mm \rightarrow 0.0371$$
$$d_{FA} = ?$$

Solución:

$$E_M = \frac{D_T}{d_{FM}} \rightarrow E_M = \frac{1300}{0.0371} = 35040.4$$
$$\Delta_E = E_B - E_M \rightarrow \Delta_E = 38111 - 35040.4 = 3070.6$$
$$E_A = E_M - \Delta_E \rightarrow E_A = 35040.4 - 3070.6 = 31969.8$$
$$E_A = E_M - \Delta_E \rightarrow E_A = 35040.4 - 3070.6 = 31969.8$$

13. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 90 mm.
- b) Altura de vuelo sobre el nivel del mar = 3700m.
- c) Elevación máxima = 2120 m.
- d) Una distancia de 1150 m sobre el nivel más bajo del terreno, aparece en la fotografía en una magnitud de 51.2 mm.

Determinar la escala media de la fotografía.

$$C = 0.090$$
$$Z_O = 3700$$
$$H_A = 2120$$
$$D_T = 1150$$
$$d_{FB} = 0.0512$$

Solución:

$$Z_A = Z_O - H_A \rightarrow Z_A = 3700 - 2120 = 1580 \text{ m}$$
$$\frac{1}{E_A} = \frac{C}{Z_A} \rightarrow E_A = \frac{Z_A}{C} \rightarrow E_A = \frac{1580}{0.090} = 17555.556$$

$$\frac{1}{E_B} = \frac{d_{fb}}{D_T} \rightarrow E_B = \frac{D_T}{d_{fb}} \rightarrow E_B = \frac{1150}{0.0512} = 22460.938$$
$$E_M = \left(\frac{1}{2}(E_A + E_B)\right) \rightarrow E_M = \frac{17555.556 + 22460.928}{2} = 20008.247$$

14. De un vuelo fotogramétrico se conocen los siguientes datos:

- Elevación de un punto = 3240 m.
- Escala para el punto "Q" = 1:7900.
- Altura de vuelo del punto mis elevado = 960m
- Altura de vuelo máxima = 1290 m.
- Escala media = 1:7500.

Determinar la altura absoluta de vuelo.

$$H_Q = 3240$$
$$E_Q = 1:7900$$
$$Z_A = 960$$
$$Z_B = 1290$$
$$E_M = 1:7500$$
$$Z_O = ?$$

Solución:

$$Z_M = \frac{1}{2} * (Z_A + Z_B)$$
$$Z_M = 1125$$
$$\frac{1}{E_M} = \frac{C}{Z_M} \rightarrow C = \frac{Z_M}{E_M} = 0.15$$
$$Z_Q = -((E_Q * C) - H_Q) = 4425$$

15. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- Altura media de vuelo = 5250 m.
- Altura máxima de vuelo = 5535 m.
- Escala máxima = 1:33100.
- Distancia entre dos puntos situados en el nivel medio del terreno = 975 m.

¿Cuál es la magnitud da esta distancia en la fotografía?

$$\begin{aligned}Z_M &= 5250 \\Z_B &= 5535 \\E_A &= 1:33100 \\D_T &= 975 \\d_{FM} &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}Z_A &= 2(Z_M - Z_B) = 4965 \\C &= \frac{Z_A}{E_A} = 0.15 \\E_B &= \frac{Z_B}{C} = 36900 \\E_M &= \frac{1}{2}(E_A + E_B) = 35000 \\d_{FM} &= \frac{D_T}{E_M} = 0.0279 \rightarrow 27.9mm\end{aligned}$$

16. De una fotografía aérea vertical y un mapa de la misma zona se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia medida en la fotografía entre dos puntos situados en el nivel medio del terreno = 57.5 mm.
- b) Distancia medida en el mapa entre los mismos dos puntos = 76.67 mm.
- c) Escala del mapa = 1:15000.

Determinar la escala media de la fotografía.

$$\begin{aligned}d_{FM} &= 57.5 \\d_{MAP} &= 76.67 \\E_{MAP} &= 1:15000 \\E_M &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}D_T &= d_{MAP} * E_{MAP} = 1150.05 \\E_M &= \frac{D_T}{d_{FM}} = 20000.86\end{aligned}$$

17. De una fotografía aérea vertical y un mapa de la misma zona se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 90 mm.
- b) Altura absoluta de vuelo = 6400 m.
- c) Elevación mínima = 540 m.
- d) Distancia medida en la fotografía entre dos puntos situados en el nivel más bajo del terreno = 12 cm.
- e) Distancia medida en el mapa entre los mismos dos puntos = 78.13 cm.

Determinar la escala del mapa.

$$\begin{aligned}C &= 0.09 \\Z_O &= 6400 \\H_B &= 540 \\d_{FB} &= 0.12 \\d_{MAP} &= 78.13 \\E_{MAP} &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}D_T &= d_{FB} * \frac{(Z_O - H_B)}{C} = 7813.33 \\E_{MAP} &= \frac{D_T}{d_{MAP}} = 1:10000.4\end{aligned}$$

18. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia en la fotografía entre el punto principal y un punto “q” = 20 mm.
- b) Altura de vuelo del punto “R” = 1460 m.
- c) Desplazamiento debido al relieve del punto “Q” con relación al plano de referencia que pasa por el punto “R” = + 5.5 mm.

Determinar* la altura de vuelo sobre el punto “Q”.

$$\begin{aligned}r_q &= 0.020 \\Z_R &= 1460 \text{ m} \\ \Delta r_q &= 5.5 \text{ mm} \\ Z_Q &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$Z_Q = Z_R - \left(\frac{Z_R * \Delta r_q}{r_q} \right) = 1058.5$$

19. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia en la fotografía entre el punto principal y un punto “q” = 75 mm.
- b) Distancia principal = 150 mm.
- c) Una distancia de 761 m sobre el plano que pasa por el punto “R” aparece en la fotografía en una magnitud de 55 mm.
- d) Desplazamiento debido al relieve del punto “Q” con relación al plano de referencia que pasa por el punto “R” = + 3.1 mm.

Calcular la diferencia de elevación entre los puntos “Q” y “R”.

$$\begin{aligned} r_q &= 0.075 \\ C &= 0.15 \\ D_T &= 761 \\ d_{FR} &= 0.055 \\ \Delta r_q &= +3.1 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} Z_R &= \frac{(C * D_T)}{d_{FR}} = 2077.454 \\ \Delta H_{QR} &= \frac{(Z_R * \Delta r_q)}{r_q} = 85.86 \end{aligned}$$

20. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia en la fotografía entre el punto principal y un punto “Q” = 55 mm.
- b) Diferencia de elevación entre el punto “Q” y un punto “R” = 180.
- c) Altura de vuelo de un punto “T” = 1010 m.
- d) Escala del punto “T” = 1:4810.
- e) Desplazamiento debido al relieve del punto “Q” con relación al plano de referencia que pasa por-el punto “R” = - 6.6 mm.

Determinar la escala del punto “R”.

$$\begin{aligned} r_q &= 0.055 \\ \Delta H_{QR} &= -180 \\ Z_R &= 1010 \end{aligned}$$

$$E_T = 1:4810$$

$$\Delta r_q = -6.6$$

Solución:

$$C = \frac{Z_T}{E_T} = 0.2099$$

$$Z_R = \frac{\Delta H_{QR}}{\Delta r_q} * r_q = 1500$$

$$E_R = \frac{Z_R}{C} = 7146$$

21. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia en la fotografía entre el punto principal y un punto “q” = 45 mm.
- b) Diferencia de elevación entre el punto “Q” y un punto “R” = - 40 m.
- c) Para una altura de vuelo de 1480 m se tiene una escala de 1:7048.
- d) Una distancia en el terreno de 320 m sobre un plano que pasa por el punto “R” aparece en la fotografía en una magnitud de 51.3 mm.

Calcular el desplazamiento debido al relieve del punto “Q” con relación al plano de referencia que pasa por el punto “R”.

$$r_q = 0.045 \text{ m}$$

$$\Delta H_{QR} = -40 \text{ m}$$

$$Z_O = 1480 \text{ m}$$

$$E_O = 1:7048$$

$$d_{FR} = 0.0513 \text{ m}$$

$$D_T = 320 \text{ m}$$

$$\Delta r_q = ?$$

Solución:

$$C = \frac{Z_O}{E_O} = 0.21$$

$$Z_R = \frac{D_T * C}{d_{FR}} = 1309 \text{ m}$$

$$\Delta r_q = r_q * \frac{\Delta H_{QR}}{Z_R} = -0.0014 \text{ m} = -1.4 \text{ mm}$$

22. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia en la fotografía entre el punto nadir y un punto “Q” = 65 mm.
- b) Elevación del punto “Q” = 830 m.
- c) Elevación de un punto “R” = 1000 m.
- d) Para una altura de vuelo de 1840 m se tiene una escala de 1:12267.

e) Una distancia en el terreno de 390 m sobre un plano que pasa por el punto “R” aparece en la fotografía en una Magnitud de 32.5 mm.

¿Cuál es el desplazamiento debido al relieve del punto “Q” con relación al plano de referencia que pasa por el punto “R”?

$$\begin{aligned}rq &= 0.065 \text{ m} \\HQ &= 830 \text{ m} \\Hr &= 1000 \text{ m} \\Z &= 1840 \\E &= 1:12267 \\Dt &= 390 \text{ m} \\df &= 0.0325 \text{ m} \\\Delta r_q &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E} &= \frac{c}{Z} \\c &= 0.15 \text{ m} \\\frac{c}{Zr} &= \frac{df}{Dt} \\Zr &= 1800 \text{ m} \\\Delta r_q &= r_q * \frac{\Delta H_{qr}}{Zr} \\\Delta r_q &= 6.1 \text{ mm}\end{aligned}$$

23. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- Distancia en la fotografía entre el punto nadir y la esquina superior de un edificio = 10 m.
- Elevación sobre el nivel del mar de la esquina superior del edificio = 385 m.
- Altura absoluta de vuelo = 1200 m.
- Desplazamiento debido al relieve del punto superior del edificio con relación al plano de referencia que pasa por su base = + 0.2 mm.

Calcular la altura de vuelo sobre la base del edificio.

$$\begin{aligned}r_q &= 0.010 \text{ m} \\H_q &= 385 \text{ m} \\Z_o &= 1200 \text{ m} \\\Delta r_q &= +0.002 \text{ m} \\Z_r &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\Delta r q = r q * \frac{\Delta H_{QR}}{Z_r}$$

$$Z_r = r q * \frac{\Delta H_{qr}}{\Delta r q}$$

$$Z_r = r q * \frac{(H_q - (Z_o - Z_r))}{\Delta r q}$$

$$Z_r(\Delta r q - r q) = r q * H_q - r q * Z_o$$

$$Z_r = 832 \text{ m}$$

24. De una fotografía aérea vertical se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia en la fotografía entre el punto principal y un punto “Q” = 55 mm.
- b) Altura de vuelo del punto “Q” = 1570 m.
- c) Altura de- vuelo sobre ©1 nivel del mar = 3400m.
- d) Desplazamiento debido al relieve del punto “Q” con relación al plano de referencia que pasa por un punto “R” =+ 26 mm.

Calcular la elevación del punto “R”.

$$r q = 0.055 \text{ m}$$

$$Z_q = 1570 \text{ m}$$

$$Z_o = 3400 \text{ m}$$

$$\Delta r q = +0.026 \text{ m}$$

$$H_r = ?$$

Solución:

$$\Delta H_{qr} = H_q - H_r$$

$$\Delta H_{qr} = (Z_o - Z_q) - (Z_o - Z_r)$$

$$\Delta H_{qr} = Z_r - Z_q$$

$$\Delta r q = r q * \frac{Z_r - Z_q}{Z_r}$$

$$Z_r = \frac{-r q * Z_q}{\Delta r q - r q}$$

$$Z_r = 2977$$

$$H_r = Z_o - Z_r$$

$$H_r = 423 \text{ m}$$

25. De un par estereoscópico de fotografías aéreas verticales con la misma altura absoluta de vuelo, se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 150 mm.
- b) Distancia en una fotografía entre los puntos “Q” y “R” = 6.5 cm (a la escala del punto “R”).
- c) Paralaje estereoscópica del punto “Q” = 7.6cm.
- d) Paralaje estereoscópica del punto “R” = 7.0cm.

¿Cuál es la pendiente en el terreno entre los puntos “Q” y “R”? (Valor angular)

$$\begin{aligned}C &= 0.150 \text{ m} \\d_f &= 0.065 \text{ m} \\P_Q &= 0.076 \text{ m} \\P_R &= 0.07 \text{ m} \\\alpha &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{C}{d_f} * \frac{\Delta P_{QR}}{P_R + \Delta P_{QR}}\right) \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0.15}{0.065} * \frac{0.006}{0.07 + 0.006}\right) = 10^\circ$$

26. De un par estereoscópico de fotografías aéreas verticales con la misma altura absoluta de vuelo, se conocen los siguientes datos:

- a) Diferencia de elevación entre los puntos “Q” y “R” = 180.
- b) Paralaje estereoscópica del punto “R” = 68 mm.
- c) Diferencia de paralajes entre los puntos “Q” y “R” = 2mm.

Calcular la altura de vuelo sobre el punto “R”.

$$\begin{aligned}\Delta H_{QR} &= 180 \text{ m} \\P_R &= 0.068 \text{ m} \\\Delta P_{QR} &= -0.002 \text{ m} \\Z_R &=?\end{aligned}$$

Solución:

$$Z_R = \frac{\Delta H_{QR}}{\Delta P_{QR}} * (P_R + \Delta P_{QR}) \rightarrow Z_R = \frac{180}{0.002} * (0.068 + 0.002) = 6300 \text{ m}$$

27. De un par estereoscópico de fotografías aéreas verticales con la misma altura absoluta de vuelo, se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal: 210 mm.
- b) Escala para el punto "R" = 1:12000.
- c) Paralaje estereoscópica del punto "R" = 10.5 cm.
- d) Diferencia de paralajes entre los puntos "Q" y "R" = 2 mm.

Calcular la diferencia de elevación entre los puntos "Q" y "R".

$$\begin{aligned}P_R &= 0.105 \text{ m} \\E_R &= 12000 \\C &= 0.210 \text{ m} \\ \Delta P_{QR} &= 0.002 \text{ m} \\ \Delta H_{QR} &= ?\end{aligned}$$

Solución:

$$\Delta H_{QR} = \frac{Z_R}{P_R + \Delta P_{QR}} * (\Delta P_{QR}) = \frac{Z_R = E_R * C = 12000 * 0.21 = 2520 \text{ m}}{0.105 + 0.002} * 0.002 = 47 \text{ m}$$

28. De un par estereoscópico de fotografías aéreas verticales con la misma altura absoluta de vuelo, se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 150 mm.
- b) Escala para un plano que pasa por el punto "R" = 1:24000.
- c) Paralaje estereoscópica del punto "R" = 92 mm.
- d) Lectura con la barra de paralaje en el punto "Q" = 22.13 mm.
- e) Lectura con la barra de paralaje en el punto "R" = 18.88 mm.

Determinar la diferencia de elevación entre los puntos "Q" y "R".

$$\begin{aligned}C &= 0.15 \text{ m} \\E_R &= 24000 \\P_R &= 0.092 \text{ m}\end{aligned}$$

$$L_Q = 0.02213 \text{ m}$$

$$L_R = 0.01888 \text{ m}$$

$$\Delta H_{QR} = ?$$

Solución:

$$Z_R = E_R * C = 24000 * 0.15 = 3600 \text{ m}$$

$$\Delta P_{QR} = L_Q - L_R = 0.02213 - 0.01888 = 0.003 \text{ m}$$

$$\Delta H_{QR} = \frac{Z_R}{P_R + \Delta P_{QR}} * (\Delta P_{QR}) = \frac{3600}{0.092 + 0.003} * 0.003 = 123 \text{ m}$$

29. De un par estereoscópico de fotografías aéreas verticales con la misma altura absoluta de vuelo, se conocen los siguientes datos:

- a) Distancia principal = 210 mm.
- b) Distancia en una fotografía entre los puntos “Q” y “R” = 5.5 cm (corregido el desplazamiento debido al relieve para un plano de referencia que pasa por el punto “R”).
- c) Diferencia de paralajes entre los puntos “Q” y “R” = 8.72 mm.
- d). Distancia entre los puntos principales de las fotografías correctamente orientadas = 33.8 cm.
- e) Distancia entre los puntos homólogos ($r'r''$) = 26.5 cm.

Calcular la pendiente en el terreno entre los puntos “Q” y “R” (Valor angular).

$$C = 0.21 \text{ m}$$

$$d_f = 0.055 \text{ m}$$

$$p'_1 p''_2 = 0.338 \text{ m}$$

$$\Delta P_{QR} = 0.00872 \text{ m}$$

$$\alpha = ?$$

Solución:

$$P_R = p'_1 p''_2 - r'r'' = 0.338 - 0.265 = 0.073 \text{ m}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{c}{d_f} * \frac{\Delta P_{QR}}{P_R + \Delta P_{QR}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.21}{0.055} * \frac{0.00872}{0.073 + 0.00872} \right) = 22^\circ$$

30. De un par estereoscópico de fotografías aéreas verticales con la misma altura absoluta de vuelo, se conocen los siguientes datos:

- a) Altura absoluta de vuelo = 3400 m.
- b) Diferencia de elevación entre los puntos “Q” y “R” = 140 m.

- c) Paralaje estereoscópica del punto “R” = 72 mm.
 - d) Distancia entre los puntos homólogos ($r'r''$) = 26.5 cm.
 - e) Distancia entre los puntos homólogos ($q'q''$) = 25.8 cm.
- Determinar la elevación del punto “R”.

$$\begin{aligned}Z_O &= 3400 \text{ m} \\ \Delta H_{QR} &= 140 \text{ m} \\ r'r'' &= 0.265 \text{ m} \\ q'q'' &= 0.258 \text{ m} \\ P_R &= 0.072 \text{ m} \\ H_R &= ?\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\Delta P_{QR} &= r'r'' - q'q'' = 0.265 - 0.258 = 0.007 \text{ m} \\ Z_R &= \frac{\Delta H_{QR}}{\Delta P_{QR}} * (P_R + \Delta P_{QR}) = \frac{140}{0.007} * (0.072 + 0.007) = 1580 \text{ m} \\ H_R &= Z_O + Z_R = 3400 + 1580 = 1820 \text{ m}\end{aligned}$$

Anexo 3. Evidencia fotográfica aplicación visualización en estéreo

Anexo 3 Evidencia fotográfica aplicación visualización en estéreo









Anexo 4

Anexo 4 Evaluación de

Anexo 4 Evaluación de expertos

PHD IN EDUCATION

VALIDATION OF THE INSTRUMENT BY EXPERT JUDGMENT

Best regard. You have been invited to participate in the evaluation process of a research instrument:
Didactic proposal for the teaching of stereophotogrammetry, from the application of the van hiele model, in students of advanced digital photogrammetry

This format is for you to send your appreciations. We appreciate your contributions to validate the instrument and obtain reliable information. Please, identify the item or question and answer by marking what you consider appropriate. If you have comments, put them in the comments column.

Element to evaluate	content validity		test validity		Criterion validity		Validity of Methodology		Observations
	Yes	No	Yes	No	Yes	No	Yes	No	
Elementary Geometry Quiz	X		X		X		X		
Photogrammetry knowledge test	X		X		X		X		It is necessary to improve the presentation of consecutive guidelines
Didactic proposal	X		X		X		X		It is a good initiative using the latest generation technology
Surnames and names	Sudhagar Nagarajan								
Academic degree	PhD								
Specialty	Photogrammetry and Geoinformatics								
Position	teacher								
Institution	Environmental and Geomatics Engineering from Florida Atlantic University - USA								

PHD IN EDUCATION

VALIDATION OF THE INSTRUMENT BY EXPERT JUDGMENT

Best regard. You have been invited to participate in the evaluation process of a research instrument:
Didactic proposal for the teaching of stereophotogrammetry, from the application of the van hiele model, in students of advanced digital photogrammetry

This format is for you to send your appreciations. We appreciate your contributions to validate the instrument and obtain reliable information. Please, identify the item or question and answer by marking what you consider appropriate. If you have comments, put them in the comments column.

Element to evaluate	content validity		test validity		Criterion validity		Validity of Methodology		Observations
	Yes	No	Yes	No	Yes	No	Yes	No	
Elementary Geometry Quiz	X		X		X		X		The test could be applied in a little more time
Photogrammetry knowledge test	X		X		X		X		I suggest not making it so long
didactic proposal	X		X		X		X		
Surnames and names	karuppasamy sudalaimuthu								
Academic degree	PhD								
Specialty	Photogrammetry and Geoinformatics								
Position	teacher								
Institution	Institute of Science and Technology - India								

PHD IN EDUCATION

VALIDATION OF THE INSTRUMENT BY EXPERT JUDGMENT

Best regard. You have been invited to participate in the evaluation process of a research instrument:
Didactic proposal for the teaching of stereophotogrammetry, from the application of the van hiele model, in students of advanced digital photogrammetry

This format is for you to send your appreciations. We appreciate your contributions to validate the instrument and obtain reliable information. Please, identify the item or question and answer by marking what you consider appropriate. If you have comments, put them in the comments column.

Element to evaluate	content validity		test validity		Criterion validity		Validity of Methodology		Observations
	Yes	No	Yes	No	Yes	No	Yes	No	
Elementary Geometry Quiz	X		X		X		X		It is possible to give a hierarchically organization to the test
Photogrammetry knowledge test	X		X		X		X		The didactic proposal has an interesting technology component
didactic proposal	X		X		X		X		The didactic proposal has an interesting technology component
Surnames and names	michael mutale								
Academic degree	msc								
Specialty	Photogrammetry and Geoinformatics								
Position	Photogrammetry and Geoinformatics								
Institution	Namibia University of Science and Technology - Windhoek, Namibia								

VALIDATION OF THE INSTRUMENT BY EXPERT JUDGMENT

Best regard. You have been invited to participate in the evaluation process of a research instrument:

Didactic proposal for the teaching of stereophotogrammetry, from the application of the van hiele model, in students of advanced digital photogrammetry

This format is for you to send your appreciations. We appreciate your contributions to validate the instrument and obtain reliable information. Please, identify the item or question and answer by marking what you consider appropriate. If you have comments, put them in the comments column.

Element to evaluate	content validity		test validity		Criterion validity		Validity of Methodology		Observations
	Yes	No	Yes	No	Yes	No	Yes	No	
Elementary Geometry Quiz	X		X		X		X		You can think of making a shorter questionnaire
Photogrammetry knowledge test	X		X		X		X		
didactic proposal	X		X		X		X		The purpose is specific and well determined.
Surnames and names	Nabila I. Abd El Hamed								
Academic degree	PhD								
Specialty	Photogrammetry and Geoinformatics								
Position	Research								
Institution	University , Frankfurt main - Germany								

Anexo 5

Anexo 5. Propuesta didáctica

Propuesta didáctica

Propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, a partir de la aplicación del modelo de van hiele, en estudiantes de fotogrametría digital avanzada

1. Introducción

La fotogrametría evoluciona sincrónicamente con su contexto social, cultural y tecnológico. La enseñanza de la fotogrametría y en especial de la estereofotogrametría debe ir de la mano de este cambio, reflejando la esencia cambiante y compleja de la profesión y la disciplina. La enseñanza de la expresión de la gráfica en tercera dimensión se enmarca en este campo, en parte debido a los continuos avances en el dibujo digital y la tecnología de representación. Su incorporación a la enseñanza afecta inevitablemente a la metodología docente, estimulando la innovación y obligando a reformular y revisar algunos modelos didácticos. Además, el verdadero motor de la innovación en la docencia es la voluntad de mejorar continuamente la calidad de la enseñanza, para lo que es necesario incorporar al aula nuevas metodologías y recursos que permitan transmitir los conocimientos de la forma más significativa y concreta. Incluyendo teorías y modelos didácticos aplicados a la expresión gráfica y la representación tridimensional, tanto a través de revisiones históricas como a través de la presentación de nuevas propuestas de aprendizajes formales e informales. Lo que significa que el aprendizaje no solo se

da en el aula bajo la acción directa de un docente. Hay muchos otros medios y contextos en los que los alumnos también pueden adquirir conocimientos, y que el profesor puede potenciar: prácticas académicas, viajes, exposiciones, Internet, juegos, entre otros. En la presente propuesta didáctica para la enseñanza de la estereofotogrametría, a partir de la aplicación de visualización tridimensional, en estudiantes de fotogrametría digital avanzada, se tiene en cuenta la teoría de Van Hiele para realizar colaboraciones y aportaciones interdisciplinarias complementada con otros ámbitos de saberes y disciplinas relacionadas con los métodos de documentación en estéreo. La propuesta didáctica contemplada en este trabajo presenta un flujo fotogramétrico para poder obtener un modelo de construcción tridimensional, de manera sofisticada a partir de una nube de puntos de alta densidad. Esa nube es producto del procesamiento fotogramétrico de imágenes aéreas verticales.

Integrado todo a los componentes del modelo de Van Hiele. El nivel 0, de visualización o reconocimiento, es empleado para la exploración e interpretación inicial de la nube de puntos. La parte de análisis como nivel 1, está relacionada con el filtrado de los datos. El nivel 2, del modelo Van Hiele, referido a la orientación o clasificación, busca hacer la disgregación de puntos terrestres y puntos no terrestres, es decir indicar cuáles puntos sirven para la generación del modelo y cuáles no; realizando la delimitación de una región y ubicando zonas en común denominadas parches. El nivel 3, del modelo Van Hiele de deducción formal, es utilizado en este flujo para determinar el umbral del área y hacer principalmente dos clasificaciones; una de vegetación y regiones y otra de zonas con características similares, para poder realizar la derivación y refinación de huellas, hasta llegar a un modelo de construcción sencillo. Finalmente, el nivel de Van Hiele de rigor, sirve para determinar la topología en dos dimensiones, realizar un ajuste topológico y un refinamiento bidimensional y así extraer los bordes de intersección del modelo de construcción, para finalmente obtenerlo de manera individual.

Dentro de este flujo, se tiene en cuenta: los contenidos que se van a aprender, las actividades, estrategias y tiempo, recursos y materiales necesarios, actividades a realizar, lo anterior integrado a las características, niveles, propiedades y fases del modelo Van Hiele.

La propuesta didáctica elabora módulos para el desarrollo de contenidos disciplinarios

con el fin de realizar una innovación en la práctica educativa de la enseñanza de la estereofotogrametría; posiblemente este resultado está dado por la participación multidisciplinaria que permita incluir recursos didácticos, gráficos y animaciones.

2. Contenidos que se van a aprender

1. Obtención de la distancia focal de la lente
2. Cálculo total del tamaño del sensor
3. Cálculo en píxeles del ancho del sensor
4. Cálculo en píxeles del alto del sensor
5. Cálculo en micrones del ancho del sensor
6. Cálculo en micrones del alto del sensor
7. Coordenadas del punto principal del sensor
8. Coordenadas del punto de mejor simetría
9. Valor de la distorsión radial del sensor
10. Valor de la distorsión tangencial del sensor
11. Valor de las distancias de descentramiento del sensor
12. Coordenadas del momento en que realiza la obturación el sensor
13. Cálculo del valor de rotación de la fotografía aérea en el eje x
14. Cálculo del valor de rotación de la fotografía aérea en el eje y
15. Cálculo del valor de rotación de la fotografía aérea en el eje Z
16. Cálculo del valor de desplazamiento de la posición de la fotografía en el eje x
17. Cálculo del valor de desplazamiento de la posición de la fotografía en el eje y
18. Cálculo del valor de desplazamiento de la posición de la fotografía en el eje Z
19. Cálculo de altura de vuelo en el momento de la toma de la fotografía
20. Cálculo del tamaño de Pixel de la fotografía.
21. Elaboración de las líneas de vuelo para toma de fotografías
22. Cálculo de traslape horizontal y vertical para planeación de líneas de vuelo
23. Cálculo del sistema de coordenadas terreno
24. Cálculo del sistema de coordenadas espacial
25. Cálculo de aerotringulación del bloque fotogramétrico
26. Cálculo de coordenadas de puntos de fotocontrol
27. Extracción fotogramétrica estereoscópica de puntos de control terrestre
28. Elaboración de rutina para realización de correlación
29. Extracción de nube de puntos de alta densidad

2.1. Actividades

2.1.1. Construcción de patrón o campo de calibración para Sensores RGB.

Se propone la construcción de un tipo de patrón de calibración basado en puntos que busca que los puntos sean localizados de manera automática, utilizando técnicas de tratamiento de imágenes y modelos de correlación integrados con segmentación para la identificación de la posición de cada uno de estos puntos.

El diseño de este patrón de calibración (Figura 39) tiene unas dimensiones de un metro por un metro, en dónde se colocan 10 puntos en la componente horizontal y 10 puntos en la componente vertical y posteriormente haciendo que eso puntos sean filas y columnas hasta completar 100. Los puntos extremos en cada una de las esquinas serán señalizados con unas marcas especiales, denominadas dianas, que tienen la tarea de orientar dicho campo de calibración para saber a qué punto corresponden cada una de las esquinas en el momento de toma de las fotografías.

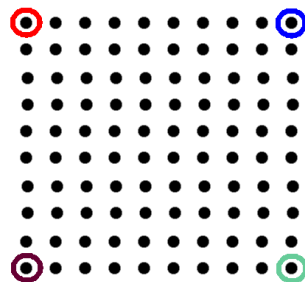


Figura 39 Esquema campo de calibración.

2.1.2. Elaboración de código para calibrar sensor.

Se realizará la programación en un software de carácter abierto para que se realice el cálculo del tamaño del sensor el ancho y el alto de los píxeles la conversión de número de píxeles a longitud la coordenada del punto principal y los valores de distorsión radial tangencial y descentramiento.

2.1.3. Desarrollo de interfaz para extracción de valores del sistema de navegación inercial.

En este apartado se realizará la interfaz gráfica y lógica que permite realizar conexión física entre el sensor de navegación inercial y un archivo de texto plano. Allí se consignarán los valores de rotación en cada uno de los ejes x y z, junto con los valores de desplazamiento en los mismos ejes. El objetivo final de este desarrollo es tener de manera confiable los valores que servirán para la construcción de la orientación interna del proceso fotogramétrico.

2.1.3.1. Programación para realización de líneas de vuelo.

En este apartado se realiza la programación para elaborar los cálculos correspondientes de la altura de vuelo en el momento de la toma la fotografía, cálculo del tamaño del Pixel después de obtenida la fotografía, diseño de las líneas de vuelo para tener un cubrimiento de traslape longitudinal y transversal que garantice la generación de estereoscopia. Esta actividad tiene objetivo de poder construir modelos y bloques fotogramétricos que permitan la generación de nubes de puntos de alta densidad.

2.2.Estrategias

Las estrategias a utilizar para el desarrollo de esta propuesta didáctica en la enseñanza del Estereofotogrametría a partir de la aplicación del modelo Van Hiele a estudiantes de fotogrametría digital avanzada, están encadenadas con objetivos que se disgregará en fases de aprendizaje:

- Reconocimiento de la característica de las líneas de vuelo teniendo en cuenta su planeación de acuerdo a su forma geométrica.
- Reconocimiento y realización de los esquemas de la línea de vuelo apoyados en herramientas que permitan realizar la medición precisa de la distancia entre línea de vuelo y línea de vuelo.

- Descubrimiento y empleo de las características visuales de las líneas de vuelo teniendo en cuenta el distanciamiento entre pasadas.
- Realización de cálculos elementales para la determinación del traslapeo horizontal y vertical, a tener en cuenta para el cubrimiento de áreas a fotografiar.
- Utilización de la terminología técnica que permita la integración con la altura de vuelo del sensor y las características técnicas de la cámara.

El nivel más básico de visualización y reconocimiento está internamente relacionado con el objeto de estudio en este caso, es necesaria la interpretación visual para poder trazar los esquemas que van a determinar el cubrimiento de la zona. Algunas de las propiedades que van a permitir hacer las relaciones geométricas y matemáticas, tienen que ver con la determinación de la línea recta consecutiva que se requiere para hacer un trazado de la línea de vuelo. Es necesario tener con precisión la distancia que hay entre obturación y obturación, que será representada por puntos en el trazado de esa línea vuelo.

La visualización de cómo queda la línea de vuelo finalmente, hace que el estudiante tenga un razonamiento para que imagine los movimientos que pueda tener el sensor. De esa manera se tiene en cuenta las rotaciones entre una obturación y otra, para cada uno de los ejes y las traslaciones que puedan presentar en cada una de las direcciones.

Para poder hacer la correcta planeación de las líneas de vuelo, se tiene en consideración el aspecto geométrico que garantiza que queden totalmente rectas en la zona cubrir. Igualmente, que queden paralelas entre línea y línea, teniendo claro el concepto de medición y de paralelismo, características visuales que denotan una base de juicio en este nivel y una amplia cobertura de los objetivos uno y dos.

2.3. Recursos materiales necesarios

Es posible que durante la ejecución de la tarea algunos estudiantes puedan requerir herramientas para ejecutar la elaboración de la línea de vuelo, sí es de carácter análogo es posible que se requieran elementos como: reglas, patrones de medida, calibradores o barras con tornillos micrométricos. Sí es de carácter digital, se pudieran utilizar herramientas de software especializadas que permitan realizar trazos y medir con un alto grado de precisión.

Para poder hacer el empleo de las características visuales de las líneas de vuelo se tiene la necesidad de explotar la medición con estándares de precisión altos, lo que conlleva hacia la adquisición del nivel 1 de razonamiento, es decir el análisis.

El objetivo orienta en la característica del modelo Van Hiele, relacionado a cada nivel de razonamiento con un lenguaje específico. Orientando principalmente la inclusión de términos nuevos y aprendizaje de unificación de significados. Lo anterior atribuido en la relación profesor estudiante, relacionando cálculo correcto del trazado de las líneas de vuelo. El profesor debe hacer entrar en contexto para un vocabulario elemental de matemática y geometría, haciendo que sus estudiantes lo entiendan más fácilmente y le sea más familiar, de acuerdo a los términos que manejan.

- Definir el concepto de líneas de vuelo
- Adquirir conocimientos básicos geometría relacionados con línea recta paralelismo y dimensión
- Establecer contacto con materiales de ayuda para realizar mediciones análogas y digitales
- adquirir información relacionada con nuevos vocablos para hablar y entender conceptualmente lo relacionado con líneas de vuelos unificando términos Para mayor entendimiento entre la relación profesor estudiante.

Es posible presentar ejemplos en dónde se utilizan las líneas rectas que se encuentren fraccionadas haciendo homologación de una línea de vuelo con la correspondiente denotación de puntos de captura de imagen. Esto conlleva a entregar y solicitar ejemplos en la vida real en dónde se puedan utilizar líneas rectas y que tengan paralelismo entre ellas. Sería necesario utilizar una regla o un elemento micrométrico que pueda servir para la medición precisa de la distancia entre línea y línea y entre posiciones de obturación.

2.4. Procedimiento para Identificación en medición de edificios

Según su terminación geométrica y sus propiedades características la diferencia entre los edificios y los árboles es que las superficies de los tejados son aproximadamente planas, mientras que las superficies de las copas son irregulares.

Acudiendo al nivel de deducción formal de modelo Van Hiele, se han propuesto varios parámetros basados en esta diferencia para segmentar edificios y árboles. Por ejemplo, las primeras derivadas de las alturas son cero (tejado plano) o constantes (tejado inclinado) para una superficie plana, y las segundas derivadas de una superficie plana inclinada son cero. Las primeras y segundas derivadas de una superficie irregular deben ser variables. Morgan y Tempfli aplicaron los operadores Laplaciano y Sobel a las superficies de altura para separar las mediciones de edificios y árboles. El problema de este método es que las derivadas de las mediciones para los tejados no son constantes debido a los errores de medición. Las características pequeñas como chimeneas, tanques de agua y tuberías en la superficie de un tejado también pueden producir valores de derivadas anormales. Además, las derivadas en el borde de un edificio tienen una gran variación, lo que hace difícil separar los edificios de los árboles adyacentes.

Tomando como base el nivel de Rigor de modelo Van Hiele, se puede separar las mediciones de edificios y árboles utilizando un método de mínimos cuadrados, para estimar los parámetros de un plano que se ajuste a un punto estereoscópico y a sus vecinos dentro de una ventana local. Se espera que las desviaciones de los puntos del tejado respecto a sus planos ajustados sean pequeñas y que los parámetros del plano sean similares y consistentes, mientras que las desviaciones y los parámetros del plano para los puntos de los árboles sean grandes y variables. En comparación con las derivadas, los parámetros del plano son menos sensibles a los valores atípicos

individuales causados por las chimeneas y los depósitos de agua. El inconveniente de este método es que los parámetros planos no son robustos en los límites de los edificios porque hay menos puntos disponibles para la estimación de los parámetros.

La diferencia de altura suele ser grande para las mediciones de árboles y cercana a cero para las mediciones de edificios. Una medición se identifica como una medición de un edificio comparando su diferencia de altura con un umbral predefinido. La transformada de Hough también se ha utilizado para separar los puntos de los edificios de las medidas de los árboles o para identificarlos directamente a partir de un conjunto de nubes de puntos sin procesar. Los datos en el espacio físico se transforman y analizan en el espacio de los parámetros. La ventaja de la transformada de Hough es su tolerancia a los huecos en los límites de las características. Sin embargo, es difícil definir el tamaño de celda óptimo para la votación en el espacio de parámetros, que está influenciado por el rango de error de las mediciones, la densidad de muestreo y los cambios de altura locales de una superficie de techo. Desafortunadamente, los cambios locales de altura de las superficies individuales son diferentes, por lo que es difícil cuantificar estos cambios utilizando un único valor. Normalmente, el tamaño de la celda se establece empíricamente, y si el tamaño de la celda es demasiado grande, varios planos del mundo real podrían fusionarse en uno solo durante la identificación del edificio. Por el contrario, si el tamaño de la celda es demasiado pequeño, un plano del mundo real podría dividirse en varios planos más pequeños.

El problema de una clasificación a nivel de punto es que no se puede garantizar que las mediciones de un edificio se clasifiquen en la misma categoría. Además, la selección de conjuntos de datos de entrenamiento para una clasificación supervisada puede llevar mucho tiempo.

2.5. Creación de Modelos de Edificación

La realización de un polígono de la huella debe generalizarse para los modelos de edificación porque la huella en bruto incluye un ruido considerable debido a los puntos irregularmente espaciados. Alharthy y Bethel emplearon el histograma de puntos límite para generalizar los bordes de la huella asumiendo que los edificios tienen sólo dos direcciones dominantes que son perpendiculares entre sí. Basándose en la misma suposición, Sampath y Shan utilizaron el modelo de mínimos cuadrados para regularizar los bordes de la huella. Recientemente, Zhang et al. han publicado un

método para refinar una huella de forma iterativa basándose en las direcciones dominantes estimadas. Las huellas con bordes oblicuos, que no son perpendiculares a las direcciones dominantes, se permiten en este método siempre que la longitud total de los bordes oblicuos sea menor que la longitud total de los bordes paralelos o perpendiculares a las direcciones dominantes.

La determinación de las construcciones puede derivarse añadiendo un valor de altura uniforme una vez que se deriva una huella de edificio refinada. Sin embargo, el proceso para derivar modelos de edificación sofisticados es más complicado. Schwalbe et al. clasificaron los métodos para obtener modelos de edificación en 3D en dos categorías: basados en modelos y basados en datos. Brenner extendió este método a edificios complejos dividiendo primero un edificio en primitivas simples y luego ajustando las primitivas individuales utilizando nubes de puntos. Sin embargo, los modelos de edificación para un área de estudio no siempre están disponibles de antemano, lo que limita la aplicación del método basado en modelos.

En el método basado en datos, las mediciones de los edificios se agrupan primero para diferentes planos del techo. A continuación, se obtiene la topología 2D de cada edificio, representada por un conjunto de superficies planas del techo conectadas y proyectadas en un plano horizontal. Rottensteiner y Jansa aproximaron primero los píxeles de los bordes con segmentos de línea y luego interceptaron estos segmentos de línea para derivar los vértices de la topología 2D.

2.6. Separación de Medidas Terrestres y no Terrestres

El primer paso en el marco propuesto para la construcción de modelos de edificación es separar las mediciones del suelo de las que no lo son. Se selecciona el filtro morfológico progresivo para esta tarea porque este filtro identifica bien las mediciones de suelo y no suelo. También se pueden utilizar otros filtros en este paso si producen una buena clasificación. El filtro morfológico progresivo clasifica las mediciones de suelo y no suelo comparando la diferencia de elevación entre las superficies interpuestas y filtradas. Aumentando gradualmente el tamaño de la ventana, el filtro separa las mediciones de los objetos no terrestres de diferente tamaño de los datos terrestres.

Para facilitar el filtrado y los cálculos de identificación de los edificios, se emplea una matriz 2D cuyos elementos representan los puntos que caen en las celdas de una malla que se superpone al conjunto de datos. El tamaño de las celdas (t_c) de la malla suele ser inferior al espacio medio de los puntos para reducir la pérdida de información.

Cada punto medido del conjunto de datos se asigna a una celda en función de sus coordenadas x, y. Si hay más de un punto en la misma celda, se selecciona el punto con la menor elevación como elemento del conjunto. Si no existe ningún punto en una celda, el elemento de la matriz correspondiente a la celda se asigna como su vecino más cercano, Interpretando que en esta operación se tiene en cuenta las propiedades de distinción y separación del modelo van Hiele.

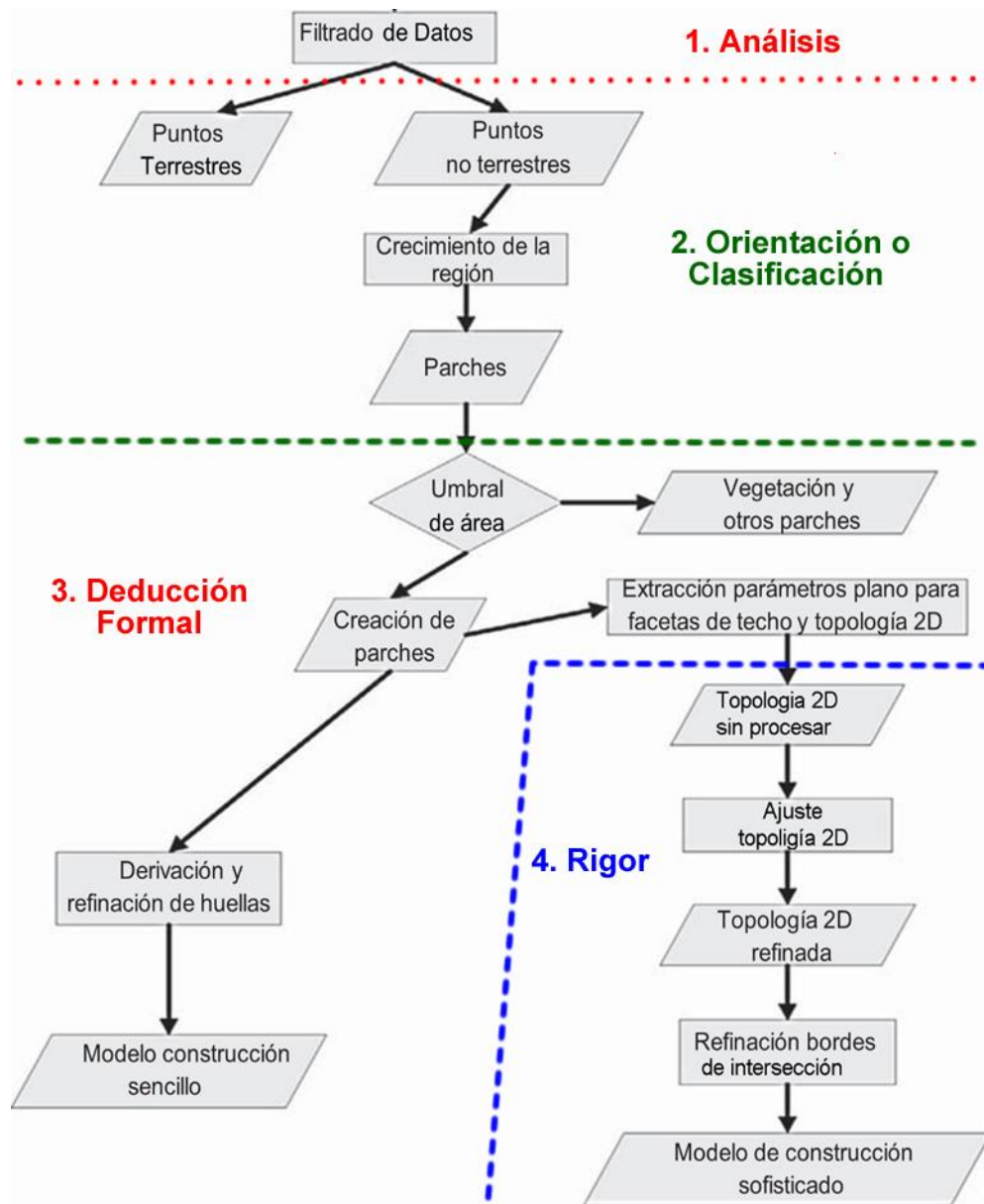


Figura 40 Aplicación de Modelo Van Hiele para creación de edificación 3D.